Über Büschel von Nullsystemen im vierdimensionalen Raum.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn.

Von

Heinrich Aymanns

aus Ahrweiler.

Bonn 1930

Über Büschel von Nullsystemen im vierdimensionalen Raum.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn.

Von

Heinrich Aymanns

aus Ahrweiler.

Bonn 1930

Berichterstatter:
Professor Dr. Beck.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

§ 1.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist dem Studium der eindimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten oder Büschel von Nullsystemen des vierdimensionalen Raumes gewidmet. Dieses Thema ist bereits mehrfach behandelt worden, so z. B. von R. Weitzenböck in seiner Komplexsymbolik, weiterhin von G. Castelnuovo in einer Abhandlung: „Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni", und vor allem in der Dissertation von M. Hoffmann[1]).

In den beiden zuletzt genannten Arbeiten findet sich bereits die Klassifikation der Büschel von Nullsystemen gegenüber der 24gliedrigen Gruppe von Kollineationen des R_4, jedoch fehlt es an allgemeinen Kriterien für die verschiedenen Fälle. Um zu solchen Kriterien zu gelangen, kommt es darauf an, die bisherige algebraische Behandlungsweise durch eine invariantentheoretische zu ersetzen. Die Lösung dieser Aufgabe, die im Folgenden durchgeführt werden soll, führt zu einer Reihe interessanter Ergebnisse, bringt allerdings erhebliche Schwierigkeiten mit sich. Da das Büschel von Nullsystemen im R_4 keine Invariante besitzt, muß die Unterscheidung der einzelnen Büscheltypen durch Kovarianten allein erfolgen, die überdies kombinanten Charakter tragen. Dabei gelangt man zu recht komplizierten Bildungen, die sich nicht unter das gewöhnliche Schema von Kovarianten und Kontravarianten subsumieren lassen; vielmehr muß man seine Zuflucht zu „Zwischenformen" nehmen, die fast alle mehrere Reihen von Veränderlichen enthalten.

Wir machen im Folgenden von der in der Dissertation von C. Fröhlich[2]) gebrachten, in Arbeiten von Döbritzsch[3]), Hoffmann, Bohres[4]) und Höfling[5]) verwandten Bezeichnungsweise Gebrauch, die verschiedene Alphabete zur Darstellung von Punkten (x), geraden Linien (X), Ebenen ($\mathfrak{X}$) und Räu-

[1]) M. Hoffmann: Die Nullsysteme im vierdimensionalen Raum und ihre ein- und zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten. Diss. Bonn 1928. Dort findet sich auch ein ausführliches Literaturverzeichnis.

[2]) C. Fröhlich: Die konformen Transformationen im dreidimensionalen Raum. Diss. Bonn 1925.

[3]) H. Döbritzsch: Über eingliedrige Gruppen konformer Transformationen des Raumes. Diss. Bonn 1928.

[4]) W. Bohres: Über zweigliedrige Gruppen konformer Transformationen des Raumes. Diss. Bonn 1929.

[5]) O. Höfling: Über dreigliedrige Gruppen konformer Transformationen des Raumes. Diss. Bonn 1929.

men ($\mathfrak{x}$) benutzt. Damit können dann die verschiedenen Laplaceschen Entwicklungen einer fünfreihigen Determinante veranschaulicht werden:

$$(xyzuv) = (xyzX) = (xYX) = (xy\mathfrak{X}) = (X\mathfrak{X}) = (x\mathfrak{x})$$
$$(x\mathfrak{y}\mathfrak{z}u\mathfrak{v}) = (x\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{X}) = (x\mathfrak{Y}\mathfrak{X}) = (x\mathfrak{y}X) = (\mathfrak{X}X) = (\mathfrak{x}x).$$

Bekanntlich bestehen zwischen den 10 Koordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ (X^{ik}), (i, k = 0, 1, 2, 3, 4; $\mathfrak{X}_{ik} = -\mathfrak{X}_{ki}$; $X^{ik} = -X^{ki}$) einer Ebene (einer Geraden) fünf Relationen[1]), die sich in die Identität:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}\mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}] \quad ((XX\mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}])$$

zusammenfassen lassen. Aber die obigen Symbole, soweit sie große Buchstaben enthalten, sollen auch dann benutzt werden, wenn diese Identitäten nicht erfüllt sind, sondern die $\mathfrak{X}_{ik}$ (X^{ik}) die zehn Koordinaten eines beliebigen schiefsymmetrischen zweifach kovarianten (kontravarianten) Tensors sind, so daß also auch dann beispielsweise gilt:

$$2\,(\mathfrak{X}xy) \equiv \mathfrak{X}_{ik}\,(x^i y^k - x^k y^i)$$
$$2\,(X\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \equiv X^{ik}\,(\mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k \mathfrak{y}_i).$$

§ 2.

Identitäten.

Es sollen zunächst einige Identitäten angeführt werden, die bei der Behandlung des Folgenden von Nutzen sind.

Für das System eines Punktes x, eines Raumes $\mathfrak{x}$, einer Geraden G und einer Ebene $\mathfrak{E}$ gilt die Beziehung[2]):

I_1): $$(Gx, \mathfrak{E}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{E}x, G\mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{E}G)\,(x\mathfrak{x}).$$

Zwei Punkte x und y und zwei Räume $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind durch die Relation[2]):

I_2): $$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, xy) \equiv (\mathfrak{a}x)\,(\mathfrak{b}y) - (\mathfrak{a}y)\,(\mathfrak{b}x)$$

verbunden, und eine ähnlich gebaute besteht für drei Punkte x, y, z und drei Räume $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die wir in der Gestalt schreiben[3]):

I_3): $$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, xyz) \equiv \begin{vmatrix} (\mathfrak{a}x) & (\mathfrak{a}y) & (\mathfrak{a}z) \\ (\mathfrak{b}x) & (\mathfrak{b}y) & (\mathfrak{b}z) \\ (\mathfrak{c}x) & (\mathfrak{c}y) & (\mathfrak{c}z) \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Diese Relationen heißen explizite:

$$\mathfrak{X}_{12}\mathfrak{X}_{34} + \mathfrak{X}_{13}\mathfrak{X}_{42} + \mathfrak{X}_{14}\mathfrak{X}_{23} = 0$$
$$\mathfrak{X}_{20}\mathfrak{X}_{34} + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{X}_{40} + \mathfrak{X}_{24}\mathfrak{X}_{03} = 0$$
$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{34} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{41} + \mathfrak{X}_{04}\mathfrak{X}_{13} = 0$$
$$\mathfrak{X}_{10}\mathfrak{X}_{24} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{X}_{40} + \mathfrak{X}_{14}\mathfrak{X}_{02} = 0$$
$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

[2]) Hoffmann, § 1. I_1 gilt auch noch für $(GG\mathfrak{x}) \equiv\!|\!\equiv 0$, $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}x) \equiv\!|\!\equiv 0$.

[3]) Fröhlich, Formel 9.

Aus I_1 und I_2 leitet man leicht eine weitere Identität für drei Punkte x, y, z, eine Ebene[1]) $\mathfrak{X}$ und einen Raum $\mathfrak{x}$ her:

I_4): $\quad (xyz, \mathfrak{X}\mathfrak{x}) = (x\mathfrak{x})\,(yz\mathfrak{X}) + (y\mathfrak{x})\,(zx\mathfrak{X}) + (z\mathfrak{x})\,(xy\mathfrak{X}).$

Eine häufig zu verwendende Identität[2]) besteht zwischen drei Komplexen[3]) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$:

I_5): $\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{A}x) + (\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}x) + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{C}x) \equiv 0.$

Aus ihr ergibt sich durch die Spezialisierung $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ weiterhin:

I_{5a}): $\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}x) + 2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}x) \equiv 0.$

Fällt noch $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammen, so folgt:

I_{5b}): $\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}x) \equiv 0.$

§ 3.

Die Nullsysteme im vierdimensionalen Raum.

Es sollen im Folgenden Nullsysteme im vierdimensionalen Raum betrachtet werden:

(1) $$(\mathfrak{A}xy) = \mathfrak{A}_{ik}x^i y^k = \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}_{ik}\,(x^i y^k - x^k y^i) = 0,$$

$$\mathfrak{A}_{ik} = -\,\mathfrak{A}_{ki},\ (i, k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Es handelt sich also um schiefsymmetrische Korrelationen[4]). Durch eine solche wird dem Punkte x^i der Nullraum:

$$\mathfrak{x}_k = \mathfrak{A}_{ik}x^i$$

zugeordnet. Diese Zuordnung ist nicht umkehrbar, da die Korrelation singulär ist.

Der Nullraum des Punktes x hat in laufenden Koordinaten y die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}xy) = 0,$$

es sei denn:

(2) $$(\mathfrak{A}xy) \equiv 0\,[y].$$

Dann heißt der Punkt x singulär.

Da der Rang des Nullsystems nur vier, zwei oder null sein kann, und der triviale letzte Fall uns nicht beschäftigen soll, so gibt es entweder einen einzigen singulären Punkt:

(3) $$\frac{1}{2}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x) = 0$$

oder für

(4) $$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$$

[1]) I_4 gilt auch dann noch, wenn nicht $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}x) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$ ist.

[2]) Hoffmann § 1.

[3]) Die Erklärung des Komplexes folgt in § 3.

[4]) Die dualen Nullsysteme:

$$(A\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = A^{ik}\,\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_k = \frac{1}{2}\,A^{ik}\,(\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k\mathfrak{y}_i) = 0,$$

$$A^{ik} = -\,A^{ki},\ (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

sollen hier nicht besonders behandelt werden.

deren ∞^2, die eine Ebene erfüllen (singuläre Ebene). Die Identität (4) faßt dann die fünf Relationen zusammen, die für homogene Ebenenkoordinaten des R_4 gelten. In diesem Falle (Rang zwei) heißt das Nullsystem ausgeartet, und die $\mathfrak{A}_{ik}$ sind die Koordinaten der singulären Ebene.

Jeder Nullraum enthält alle singulären Punkte. Für das ausgeartete Nullsystem gibt es daher ∞^1 Nullräume; es sind das alle Räume durch die singuläre Ebene.

Das nicht ausgeartete Nullsystem hat dagegen ∞^3 Nullräume; alle Punkte einer Geraden X durch den singulären Punkt haben denselben Nullraum, der bei beliebigen $\mathfrak{x}$ durch die Gleichung:

$$(5) \qquad (\mathfrak{x}y) = (X\mathfrak{x}, \mathfrak{A}y) = 0$$

geliefert und „Nullraum der Geraden X" genannt wird[1]). Ist umgekehrt der Raum $\mathfrak{x}$ durch den singulären Punkt gegeben, so ist der Ort aller Punkte, die $\mathfrak{x}$ als Nullraum haben, die Gerade:

$$(6) \qquad (X\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{A}x\mathfrak{Y}) = 0,$$

„die Nullgerade[2]) des Raumes $\mathfrak{x}$".

Der Geradenpentakomplex.

Sei y ein Punkt des Nullraumes von x, $(\mathfrak{A}xy) = 0$.
Bei festem x gibt es dann ∞^2 gerade Linien:

$$X^{ik} = x^i y^k - x^k y^i,$$

die ein Bündel erfüllen. Nimmt man auch den Punkt x veränderlich, so wird die Gleichung:

$$(7) \qquad (\mathfrak{A}X) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{A}_{ik}X^{ik} = 0$$

durch ∞^5 gerade Linien erfüllt. Die Figur dieser Geraden, ein Analogon zum linearen Linienkomplex des dreidimensionalen Raumes, heißt ein Geradenpentakomplex. Er besteht beim nicht ausgearteten Nullsystem aus ∞^4 Geradenbündeln, deren Scheitel nicht singulär sind, und aus allen ∞^3 Geraden durch den singulären Punkt, im Falle des ausgearteten Nullsystems aus allen Geraden, die wenigstens einen Punkt mit der singulären Ebene gemeinsam haben. Der Geradenpentakomplex soll ausgeartet heißen, wenn das zugehörige Nullsystem es ist. Nullsystem und Geradenpentakomplex bestimmen sich nämlich wechselseitig, so daß man beide Bezeichnungen durcheinander ebenso benutzen kann, wie im dreidimensionalen Raum die Worte „Nullsystem" und „Gewinde" (linearer Geradentrikomplex). Im Übrigen werden wir uns erlauben, durch „Komplex" ohne weiteren Zusatz einen Geradenpentakomplex der soeben beschriebenen Art abzukürzen.

---

[1]) Hoffmann, S. 15.
[2]) Hoffmann, S. 16.

Der Nullpunkt einer Ebene.

Einer Ebene $\mathfrak{E}$ wird durch den Komplex $\mathfrak{A}$ der auf ihr liegende Punkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{E}x) = 0 \tag{8}$$

zugeordnet, der Nullpunkt[1]) der Ebene $\mathfrak{E}$. Er ist der Scheitel des in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegenden Büschels von Komplexgeraden (Hoffmann, Satz 15). Ist $\mathfrak{A}$ ausgeartet, so ist der Nullpunkt von $\mathfrak{E}$ ihr Schnittpunkt mit der singulären Ebene.

Ist aber:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x], \tag{9}$$

so ist jede Gerade der Ebene Komplexgerade. Diese Ebenen sind erzeugende Ebenen[2]) des Komplexes genannt worden. Für einen nicht ausgearteten Komplex gibt es ∞^3 solcher erzeugenden Ebenen, die alle durch den singulären Punkt laufen. Der ausgeartete Komplex hat dagegen ∞^4 erzeugende Ebenen; es sind das alle Ebenen, die die singuläre Ebene längs einer Geraden schneiden; insbesondere muß auch die singuläre Ebene selbst als erzeugend bezeichnet werden.

Zwei Komplexe.

Zwei Komplexe $(\mathfrak{A}X) = 0$ und $(\mathfrak{B}X) = 0$ bestimmen den „kovarianten Punkt“:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) = 0. \tag{10}$$

Sind beide Komplexe ausgeartet, so ist er der Schnittpunkt ihrer singulären Ebenen. Ist nur $\mathfrak{B}$ ausgeartet, so ist er der Nullpunkt der singulären Ebene von $\mathfrak{B}$ in bezug auf den Komplex $\mathfrak{A}$. Sind beide Komplexe nicht ausgeartet, so findet man eine Reihe von Konstruktionen bei Hoffmann (S. 26, 33—36, 39).

Verschwindet aber die Kovariante identisch:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) \equiv 0\,[x], \tag{11}$$

so heißen die beiden Komplexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zueinander konjugiert[3]).

Sind beide Komplexe ausgeartet, so sind sie konjugiert, sobald sie zusammen fallen oder ihre singulären Ebenen sich in einer Geraden schneiden; ist nur $\mathfrak{B}$ ausgeartet, so bedeutet konjugierte Lage, daß die Ebene $\mathfrak{B}$ erzeugend für den Komplex $\mathfrak{A}$ ist. Für den Fall, daß beide Komplexe nicht ausgeartet sind, findet man Deutungen bei Hoffmann (S. 26, 33, 39, 40).

---

[1]) Hoffmann, S. 21.
[2]) Hoffmann, S. 18 und 23.
[3]) Hoffmann, S. 26.

§ 4.

Kombinanten des Komplexbüschels: $\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{B}$.

Zwei getrennte Komplexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmen das Komplexbüschel

$$\lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}.$$

Man überzeugt sich leicht vom kombinanten Charakter folgender Bildungen:

$C_1(x, x, X)$:

$$(\mathfrak{A}x, \mathfrak{B}x, X)$$

$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X})$:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{E}, \mathfrak{B}\mathfrak{E}, \mathfrak{X})$$

$C_3(x, \mathfrak{X})$:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}x) - (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}x)$$

$C_4(X, Z)$:

$$(\mathfrak{A}Z)(\mathfrak{B}X) - (\mathfrak{B}Z)(\mathfrak{A}X).$$

Wir können sie vom ersten Grade nennen, da sie in den $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ linear sind. Daran schließen sich die Kombinanten zweiten Grades[1]):

$C_5(x, X)$:

$$(\mathfrak{B}X)(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x) + (\mathfrak{A}X)(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)$$

$C_6(X, X, \mathfrak{x})$:

$$(\mathfrak{B}X)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{x}) - 2(\mathfrak{B}X)(\mathfrak{A}X)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{A}X)^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{x})$$

$C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{x})(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{x}) - (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2.$$

Schließlich brauchen wir noch zwei Kombinanten dritten Grades:

$C_8(X, X, \mathfrak{X})$:

$$(\mathfrak{B}X)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{X}) + (\mathfrak{B}X)(\mathfrak{A}X)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) + (\mathfrak{A}X)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{X})$$

$C_9(X)$:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, X).$$

Um dem Leser zu ermöglichen, die folgenden Entwicklungen in jedem Stadium nachprüfen zu können, führen wir für die von Hoffmann angegebenen kanonischen Darstellungen die ausgerechneten Kombinanten an.

$$\text{I. } (\mathfrak{A}X) = X^{02} + X^{34}, \quad (\mathfrak{B}X) = X^{03} + X^{14}.$$

C_1: $x^2x^4X^{01} + x^0x^3X^{02} - (x^0x^2 + x^3x^4)X^{03} - (x^1x^2 - x^3x^3)X^{04}$
$+ x^0x^4X^{12} - x^4x^4X^{13} + x^3x^4X^{14} + x^0x^0X^{23} + x^0x^1X^{24}$
$- (x^1x^4 + x^0x^3)X^{34}$.

---

[1]) Die Kombinante C_7 findet sich bereits bei Weitzenböck und Hoffmann.

C_2: $(\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{24} + \mathfrak{E}_{23}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{23})\,\mathfrak{X}_{01}$
$- (\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{23})\,\mathfrak{X}_{02}$
$+ (\mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{12} - \mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{23})\,\mathfrak{X}_{03}$
$+ (\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{23})\,\mathfrak{X}_{04}$
$+ (\mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{03} - \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{24})\,\mathfrak{X}_{12}$
$- (\mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{02} + \mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{24})\,\mathfrak{X}_{13}$
$- (\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{12} - \mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{24})\,\mathfrak{X}_{14}$
$+ (\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{02} + \mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{14})\,\mathfrak{X}_{23}$
$+ (\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{12} - \mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{14} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{24} + (\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{34}$.

C_3: $x^0\,(\mathfrak{X}_{03} + 2\,\mathfrak{X}_{14}) - x^1\mathfrak{X}_{13} + x^2\mathfrak{X}_{23} - 2\,x^3\mathfrak{X}_{12} + x^4\,(2\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{34})$.

C_4: $(Z^{02} + Z^{34})\,(X^{03} + X^{14}) - (Z^{03} + Z^{14})\,(X^{02} + X^{34})$.

C_5: $(X^{03} + X^{14})\,x^4 - (X^{02} + X^{34})\,x^0$.

C_6: $-2\,[(X^{03} + X^{14})\,{}^2\mathfrak{x}_1 + (X^{03} + X^{14})\,(X^{02} + X^{34})\,\mathfrak{x}_3 + (X^{02} + X^{34})\,{}^2\mathfrak{x}_2]$.

C_7: $4\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3{}^2$.

C_8: $-2\,[(X^{03} + X^{14})\,{}^2\mathfrak{X}_{13} + 2\,(X^{03} + X^{14})\,(X^{02} + X^{34})\,\mathfrak{X}_{12}$
$- (X^{02} + X^{34})\,{}^2\mathfrak{X}_{23}]$.

C_9: $4\,X^{04}$.

II. $(\mathfrak{A}X) = X^{04}$, $(\mathfrak{B}X) = X^{12} + X^{34}$.

C_1: $x^2x^4X^{01} - x^1x^4X^{02} + x^4x^4X^{03} - x^3x^4X^{04} + x^0x^2X^{14} - x^0x^1X^{24}$
$+ x^0x^4X^{34}$.

C_2: $\mathfrak{E}_{23}\,(\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{34})\,\mathfrak{X}_{01} - \mathfrak{E}_{13}\,(\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{34})\,\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{E}_{12}\,(\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{34})\,\mathfrak{X}_{03}$
$+ (-\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{23} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{12} + (\mathfrak{E}_{04}\mathfrak{E}_{23} - \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{12})\,\mathfrak{X}_{13} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{23}\mathfrak{X}_{14}$
$+ (\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{12} - \mathfrak{E}_{04}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{X}_{24} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{X}_{34}$.

C_3: $-x^0\mathfrak{X}_{03} + x^1\mathfrak{X}_{13} + x^2\mathfrak{X}_{23} + x^4\,(2\,\mathfrak{X}_{12} + \mathfrak{X}_{34})$.

C_4: $Z^{04}\,(X^{12} + X^{34}) - (Z^{12} + Z^{34})\,X^{04}$.

C_5: $-X^{04}x^4$.

C_6: $2\,X^{04}\,[(X^{12} + X^{34})\,\mathfrak{x}_3 + X^{04}\mathfrak{x}_0]$.

C_7: $-\mathfrak{x}_3{}^2$.

C_8: $2\mathfrak{X}_{03}\,(X^{04})^2$.

C_9: $\equiv 0$.

IIIa. $(\mathfrak{A}X) = X^{12}$, $(\mathfrak{B}X) = X^{34}$.

C_1: $x^2x^4X^{13} - x^2x^3X^{14} - x^1x^4X^{23} + x^1x^3X^{24}$.

C_2: $-\mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{34}\mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{34}\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{E}_{04}\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{X}_{03} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{X}_{04}$
$- \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{X}_{13} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{14} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{04}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{24}$.

C_3: $-x^1\mathfrak{X}_{01} - x^2\mathfrak{X}_{02} + x^3\mathfrak{X}_{03} + x^4\mathfrak{X}_{04}$.

C_4: $Z^{12}X^{34} - Z^{34}X^{12}$.

C_5: -0.

C_6: $-2\,X^{12}X^{34}\mathfrak{x}_0$.

C_7: $-\mathfrak{x}_0{}^2$.

C_8: $\equiv 0$.

C_9: $\equiv 0$.

IIIb. $(\mathfrak{A}X) = X^{12} + X^{34}$, $(\mathfrak{B}X) = X^{24}$.

C_1: $x^2x^4X^{12} - x^2x^2X^{14} - x^4x^4X^{23} + (x^1x^2 + x^3x^4)\,X^{24} - x^2x^4X^{34}$.

C_2: $(\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{34} - \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{X}_{02}$
$- (\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{04}\mathfrak{E}_{13})\,\mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{X}_{04} - \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{12}$
$+ (\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{02} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{04})\,\mathfrak{X}_{13} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{14} - \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{34}$.

C_3: $2\,(x^2\mathfrak{X}_{03} - x^4\mathfrak{X}_{01})$.

C_4: $(Z^{12} + Z^{34})\,X^{24} - Z^{24}\,(X^{12} + X^{34})$.

C_5: $\equiv 0$.

C_6: $2\,(X^{24})\,{}^2\mathfrak{x}_0$.

C_7: $\equiv 0$.

C_8: $\equiv 0$.

C_9: $\equiv 0$.

IV. $(\mathfrak{A}X) = X^{24}$, $(\mathfrak{B}X) = X^{34}$.

C_1: $x^4\,(x^2X^{34} - x^3X^{24} + x^4X^{23})$.

C_2: $(\mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{13} - \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12})\,\mathfrak{X}_{01}$
$+ \mathfrak{E}_{01}\,(-\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{E}_{12}\mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{X}_{13} + \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{X}_{23})$.

C_3: $2\,x^4\mathfrak{X}_{01}$.

C_4: $Z^{24}X^{34} - Z^{34}X^{24}$.

C_5: $\equiv 0$.

C_6: $\equiv 0$.

C_7: $\equiv 0$.

C_8: $\equiv 0$.

C_9: $\equiv 0$.

§ 5.

Umgestaltung einiger Kombinanten.

Für die weitere Behandlung erweist es sich als zweckmäßig, einige der Kombinanten noch in anderer Form zu schreiben.

Unter Benutzung von I_5 läßt sich C_3 leicht umgestalten:

(12) $C_3\,(x, \mathfrak{X}) \equiv 2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}x) + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{X}x) \equiv -\{2\,(\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}x) + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{X}x)\}$.

In ähnlicher Weise finden wir mittels der Identität I_{5a} eine andere Darstellung der Kombinante C_5:

(13) $$2\,C_5(x, X) \equiv (\mathfrak{BX})(\mathfrak{AA}, \mathfrak{Bx}) + (\mathfrak{AX})(\mathfrak{BB}, \mathfrak{Ax}).$$

Die Kombinanten C_5 und C_8 sind durch zwei Identitäten miteinander verbunden: zunächst kann man nämlich in der Kombinante C_8 die drei Ausdrücke:

$$(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{X}), \quad (\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X}), \quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{X})$$

auf Grund von I_{5a} umgestalten, zum Beispiel:

$$(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{X}) \equiv -(\mathfrak{AA}; \mathfrak{X}, \mathfrak{AB}) \equiv 2(\mathfrak{AX}, \mathfrak{A}, \mathfrak{AB}) \equiv 2(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{AX}),$$

oder etwas umständlicher:

$$(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X}) \equiv -(\mathfrak{BB}; \mathfrak{X}, \mathfrak{AA}) \equiv 2(\mathfrak{BX}; \mathfrak{B}, \mathfrak{AA}) \equiv -2(\mathfrak{AA}; \mathfrak{B}, \mathfrak{BX})$$
$$\equiv 4(\mathfrak{AB}; \mathfrak{A}, \mathfrak{BX}) \equiv -4(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BX}).$$

Vertauscht man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so findet man ebenso:
$(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X}) \equiv 4(\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{AX})$, und daher ist schließlich:

$$(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X}) \equiv 2(\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{AX}) - 2(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BX}).$$

Es ergibt sich somit:

(14) $$C_8(X, X, \mathfrak{X}) \equiv 2\,[(\mathfrak{BX})\{(\mathfrak{BX})(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{AX}) + (\mathfrak{AX})(\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{AX})\}$$
$$-(\mathfrak{AX})\{(\mathfrak{BX})(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BX}) + (\mathfrak{AX})(\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BX})\}].$$

Das kann man abgekürzt auch so schreiben:

(14) $$C_8(X, X, \mathfrak{X}) \equiv 2\,[(\mathfrak{BX})\,C_5(\mathfrak{AX}, X) - (\mathfrak{AX})\,C_5(\mathfrak{BX}, X)].$$

Ersetzt man umgekehrt in C_8 die Ebene $\mathfrak{X}$ durch die beiden Nullräume $\mathfrak{Ax}$ und $\mathfrak{Bx}$, so ergibt sich durch Anwendung von I_2, I_{5a} und I_{5b} leicht die Beziehung:

(15) $$2\{C_5(x, X)\}^2 \equiv (\mathfrak{BX})^2(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}; \mathfrak{Ax}, \mathfrak{Bx}) + (\mathfrak{AX})^2(\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}; \mathfrak{Ax}, \mathfrak{Bx})$$
$$+ (\mathfrak{BX})(\mathfrak{AX})(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}; \mathfrak{Ax}, \mathfrak{Bx})$$

oder: $$2\{C_5(x, X)\}^2 \equiv C_8(X; X; \mathfrak{Ax}, \mathfrak{Bx}).$$

Von Nutzen ist auch eine andere Darstellung für C_9. Die Gleichung

$$(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, X) = 0$$

stellt im allgemeinen eine Ebene durch die drei Punkte

$$(\mathfrak{AA}x) = 0, \; (\mathfrak{AB}x) = 0, \; (\mathfrak{BB}x) = 0$$

dar; durch sie gehen die beiden Nullräume des kovarianten Punktes irgend zweier Büschelkomplexe in bezug auf beide Komplexe. Das gibt die Relation:

(16) $$C_9(X) \equiv 4(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}; \mathfrak{B}, \mathfrak{AB}; X).$$

§ 6.

Allgemeines über Komplexbüschel.

Eine Gerade G, die den beiden „Basiskomplexen“ $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Büschels gleichzeitig angehört:

(17) $$(\mathfrak{A}G) = (\mathfrak{B}G) = 0 \quad (C_4(G, X) \equiv 0\,[X]),$$

liegt sogleich in allen Büschelkomplexen, sie gehört dem „Durchschnitt“[1]) der beiden Geradenpentakomplexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an. Die Gesamtheit aller Durchschnittsgeraden bildet einen „Geradentetrakomplex“.

Gehört G diesem nicht an, so läuft durch sie ein einziger Büschelkomplex:

(18) $$C_4(G, X) = (\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}X) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{B}X) = 0.$$

Ist er nicht ausgeartet, so stellt:

(19) $$C_6(G, G, x) = (\mathfrak{B}G)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x) - 2(\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) + (\mathfrak{A}G)^2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}x) = 0$$

seinen singulären Punkt dar.

Wählt man die Gerade G außerhalb des Tetrakomplexes veränderlich, so liefert (18) alle Komplexe des Büschels. Zwei Gerade G_1 und G_2 bestimmen so denselben Komplex dann und nur dann, wenn:

$$C_4(G_1, G_2) = 0$$

ist.

Die Beantwortung der Frage nach den ausgearteten Komplexen im Büschel kommt nach (19) auf die Lösung der Identität hinaus:

(19a) $$C_6(G, G, x) \equiv 0\,[x].$$

Der kovariante Punkt zweier Büschelkomplexe heißt:

(20) $$\dot{C}_6(G_1, G_2, x) = (\mathfrak{B}G_1)(\mathfrak{B}G_2)(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x) + (\mathfrak{A}G_1)(\mathfrak{A}G_2)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}x) - \{(\mathfrak{B}G_1)(\mathfrak{A}G_2) + (\mathfrak{B}G_2)(\mathfrak{A}G_1)\}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) = 0.$$

Die beiden Büschelkomplexe sind daher konjugiert für

(20a) $$C_6(G_1, G_2, x) \equiv 0\,[x].$$

§ 7.

Klassifikation der Komplexbüschel.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Sache selbst über.

I. $$\boxed{C_9(X) \equiv 0\,[X].}$$

Die drei in der Identität (19a) auftretenden Linearformen in x sind dann linear unabhängig; die Identität (19a) kann nur für $(\mathfrak{A}G) = (\mathfrak{B}G) = 0$

[1]) Hoffmann. § 19.

erfüllt werden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es gibt also keinen ausgearteten Komplex im Büschel. Ebenso schließt man (Identität 20a), daß das Büschel kein Paar zueinander konjugierter Komplexe enthält. Die drei Punkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = 0, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{x}) = 0, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{x}) = 0$$

bestimmen eine Ebene, in der die singulären Punkte (19) einen irreduziblen Kegelschnitt bilden.

II. $$C_9\,(X) \equiv 0\,[X], \quad C_5\,(x, X) \equiv 0\,[x]\,[X].$$

Ersetzen wir in der Kombinante C_9 die Gerade X durch die drei Räume $\mathfrak{A}x$, $\mathfrak{B}x$, $\mathfrak{x}$, so ergibt sich ein Symbol, welches drei Punkte und drei Räume enthält und als dreireihige Determinante dargestellt werden kann (I_3). Unter Berücksichtigung der Identitäten I_{5a} und I_{5b} folgt so:

(21) $$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}; \mathfrak{A}x, \mathfrak{B}x, \mathfrak{x}) \equiv$$
$$2\,[(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)^2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{x}) + 2\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)^2\,(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{x})].$$

Bei unserer jetzigen Voraussetzung verschwindet also der Ausdruck in der Klammer rechts identisch für alle x und auch für alle $\mathfrak{x}$, so daß die Identität (19a) durch jede Gerade G erfüllt werden kann, die der Bedingung genügt:

(22) $$C_5\,(x, G) = 0.$$

So wird dem Punkte x ein Büschelkomplex zugeordnet, in dem G liegt. Indessen zeigt sich, daß die beiden Komplexe

$$C_5\,(x, G) = 0 \quad \text{und} \quad C_5\,(y, G) = 0$$

zusammenfallen, das heißt: Die Gerade G in (22) ist an einen ganz bestimmten (ausgearteten) Büschelkomplex $C_5\,(p, X) = 0$ gebunden[1]).

Wir zeigen jetzt, daß das Auftreten eines zweiten ausgearteten Büschelkomplexes die Kombinante C_5 identisch zum Verschwinden bringt. Dazu benutzen wir den schon nachgewiesenen ausgearteten Büschelkomplex als Basiskomplex $\mathfrak{A}^*$; der weitere, nach Voraussetzung jetzt existierende ausgeartete Büschelkomplex werde als Basiskomplex $\mathfrak{B}^*$ benutzt. Daß die

---

[1]) Zu zeigen ist, daß zwei verschiedene Punkte x und y denselben Büschelkomplex liefern, daß also:

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, y) - (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, y)\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x) \equiv 0\,[x]\,[y].$$

Das folgt aber aus der Identität:

$$4\,[(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, y) - (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, y)\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, x)] \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, x, y)$$

auf Grund der Bedingung $C_9 \equiv 0$. Der Beweis der Identität erfolgt mittels I_2 und (16).

Kombinante C_5 dann identisch verschwindet, folgt[1]) sofort aus ihrer zweiten Darstellung (13). Der Komplex (22) ist also der einzige ausgeartete Büschelkomplex.

Ebenfalls durch spezielle Wahl der Basiskomplexe zeigt man, daß es kein Paar getrennter konjugierter Komplexe im Büschel gibt.

Es erhebt sich nun die Frage nach dem Ort der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe. Diese erfüllen eine Gerade:

(23) $$C_8(X, X, \mathfrak{X}) \equiv$$
$$(\mathfrak{B}X)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{X}) + (\mathfrak{B}X)(\mathfrak{A}X)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{X}) + (\mathfrak{A}X)^2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{X}) = 0.$$

Zunächst ist wegen (15) das identische Verschwinden

$$C_8 \equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{X}]$$

ausgeschlossen.

Weiter ist die der Geraden X zugeordnete Gerade

$$C_8(X, X, \mathfrak{X}) = 0$$

von X unabhängig, die Gleichung (23) stellt also nur eine einzige Gerade dar[2]).

Endlich ist diese Gerade der Ort der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe, wie nun gezeigt werden soll. Damit eine Gerade H und ein Punkt p vereinigt liegen, muß sein:

$$(HpZ) \equiv 0\,[Z].$$

Sei jetzt H die Gerade

$$(H\mathfrak{X}) \equiv C_8(G, G, \mathfrak{X}) = 0$$

und p irgendein singulärer Punkt

$$(p\mathfrak{x}) = C_6(X, X, \mathfrak{x}) = 0.$$

Dann ist:

(24) $$(HpZ) \equiv C_9(Z)\,\{C_4(G, X)\}^2,$$

und daraus folgt wegen $C_9 \equiv 0$ die Richtigkeit unserer Behauptung.

---

[1]) Nach Voraussetzung ist $(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}^*\mathfrak{x}) = 0\,[\mathfrak{x}]$, und daher ist auch $(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*x) \equiv 0\,[x]$. Ebenso schließt man $(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}^*, \mathfrak{A}^*x) \equiv 0\,[x]$.

[2]) Als Bedingung dafür, daß zwei Gerade G und H identisch sind, kann man benutzen: $$(G\mathfrak{x}, H\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]\,[\mathfrak{X}].$$

Sie sagt aus: Schneidet man die beiden Geraden G und H mit einem Raum $\mathfrak{x}$, so wird die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte unbestimmt, wie auch der Raum $\mathfrak{x}$ gewählt sei.

Jetzt soll sein: $$(G\mathfrak{X}) \equiv C_8(X, X, \mathfrak{X})$$
$$(H\mathfrak{X}) \equiv C_8(Y, Y, \mathfrak{X}).$$

Dann ist: $$(G\mathfrak{x}, H\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) \equiv C_9(\mathfrak{X}\mathfrak{x})\,C_4(Y, X)\,C_6(X, Y, \mathfrak{x}),$$

und man sieht sofort, daß die Geraden G und H wegen $C_9 \equiv 0$ stets zusammenfallen, wie auch X und Y gewählt werden.

Ebenso läßt sich zeigen, daß die Gerade (23) der Ort aller kovarianten Punkte ist, die die Büschelkomplexe zu je zweien bestimmen.

Sie gehört in allen Fällen dem Durchschnitt der beiden Komplexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an. (Der Beweis ergibt sich aus den Identitäten I_{5a} und I_{5b}.) Daher trifft sie auch in unserem Falle die singuläre Ebene des einzigen ausgearteten Büschelkomplexes (22).

Der Schnittpunkt[1]) heißt bei Hoffmann[2]) „Hauptpunkt". Er kann mittels der Kombinante C_6 dargestellt werden, wenn man darin die eine Gerade X durch die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{AB}$ und q ersetzt. Er heißt dann (bei beliebigem X und q):

$$C_6\,(X;\,\mathfrak{AB},\,q;\,\mathfrak{x}) = 0. \tag{25}$$

Jeder von ihm verschiedene Punkt der Geraden (23) ist singulärer Punkt eines nicht ausgearteten Büschelkomplexes. Er ist zugleich kovarianter Punkt von ∞^1 Paaren von Büschelkomplexen; die beiden singulären Punkte der Komplexe eines solchen Paares werden durch ihn und den Hauptpunkt harmonisch getrennt. Der Hauptpunkt dagegen ist kovarianter Punkt des ausgearteten Komplexes mit allen übrigen Büschelkomplexen.

Da die Gerade (23) und die Ebene (22) einen Punkt gemeinsam haben, können sie auch durch einen Raum (bei Hoffmann[3]) heißt er „Hauptraum") verbunden werden. Dieser kann bei beliebigem G durch:

$$C_5\,(x,\,G) = 0 \tag{26}$$

dargestellt werden. Er ist zugleich der gemeinsame Nullraum aller Punkte der Geraden $C_8\,(X, X, \mathfrak{X}) = 0$ in bezug auf irgendeinen Büschelkomplex.

---

[1]) Die Gerade (23) kann nicht ganz in der singulären Ebene $C_5\,(p, X) = 0$ des ausgearteten Büschelkomplexes liegen, sonst müßte diese Ebene alle singulären Punkte (19) der nicht ausgearteten Büschelkomplexe enthalten.

Sei also $(\mathfrak{E}X) \equiv C_5\,(p, X)$ bei beliebigem p,
und $(s\mathfrak{x}) \equiv C_6\,(G, G, \mathfrak{x})$ bei beliebigem G.

Läge die Gerade (23) jetzt ganz in der Ebene $(\mathfrak{E}X) = 0$, so müßte

$$(\mathfrak{E}sx) \equiv 0\,[x]$$

sein, wie auch p bei $\mathfrak{E}$ und G bei s gewählt werden. Man findet leicht die Identität:

$$(\mathfrak{E}sx) \equiv -2\,C_5\,(p, G)\,C_5\,(x, G).$$

Aus $(\mathfrak{E}sx) \equiv 0\,[x]\,[p]\,[G]$ würde jetzt entweder $C_5\,(p, G) \equiv 0\,[p]\,(G]$ oder $C_5\,(x, G) \equiv 0\,[x]\,[G]$ folgen. Beide Bedingungen widersprechen der unter II gemachten Voraussetzung.

[2]) Hoffmann, S. 34.

[3]) Hoffmann, S. 38.

III. $C_9(X) \not\equiv 0\,[X],\quad C_5(x, X) \not\equiv 0\,[x]\,[X],\quad C_6(X, X, \mathfrak{x}) \not\equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{x}]$

Aus der Voraussetzung $C_5 \not\equiv 0$ folgt[1]) bereits $C_9 \equiv 0$. Zur weiteren Behandlung ist es zweckmäßig, statt der Forderung $C_5(x, X) \not\equiv 0\,[x]\,[X]$ die ihr äquivalente[2])

$$C_8(X, X, \mathfrak{X}) \not\equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{X}]$$

einzuführen (obwohl die Kombinante C_8 von höherem Grade ist); denn diese Identität kann durch das System der drei einfacheren Bedingungen:

(27) $(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{X}) \not\equiv 0\,[\mathfrak{X}],\quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{X}) \not\equiv 0\,[\mathfrak{X}],\quad (\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$

ersetzt werden[3]).

Die Bedingungen (27) sagen aus: Die drei Punkte

$$(\mathfrak{AA}\mathfrak{x}) = 0,\quad (\mathfrak{AB}\mathfrak{x}) = 0,\quad (\mathfrak{BB}\mathfrak{x}) = 0$$

fallen, soweit sie existieren, zusammen. Alle drei Punkte können nicht gleichzeitig unbestimmt werden, da sonst $C_6(X, X, \mathfrak{x}) \equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{x}]$ wäre. Die drei Linearformen in $\mathfrak{x}$ haben daher den Rang eins, sie unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren. Gleichung (19) stellt jetzt nur einen einzigen Punkt dar, wie auch G gewählt wird; er ist:

1. der gemeinsame singuläre Punkt aller nicht ausgearteten Büschelkomplexe,
2. der kovariante Punkt irgend zweier Komplexe des Büschels (falls dieser existiert).

Damit die erste Behauptung richtig bleibt, ist G gemäß der Bedingung $C_6(G, G, \mathfrak{x}) \not\equiv 0\,[\mathfrak{x}]$ zu wählen. Es sind also diejenigen G auszunehmen, welche der in $(\mathfrak{AG}) : (\mathfrak{BG})$ quadratischen Gleichung (19) genügen, d. i. die geraden Linien zweier ausgearteter Büschelkomplexe. Dabei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Diskriminante

$$C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{AA}\mathfrak{x})(\mathfrak{BB}\mathfrak{x}) - (\mathfrak{AB}\mathfrak{x})^2$$

identisch verschwindet oder nicht.

IIIa. $C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \not\equiv 0$

Es gibt dann zwei getrennte Lösungen für $(\mathfrak{AG}) : (\mathfrak{BG})$. Ihre Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}$ ist dadurch gewährleistet, daß die Linearformen

[1]) Ersetzt man in C_5 den Punkt x durch den Schnittpunkt einer beliebigen Geraden Z mit dem Nullraum von $\mathfrak{AB}$ in bezug auf den Komplex $\mathfrak{B}$, so folgt aus $C_5 \not\equiv 0$ auch:

$$(\mathfrak{BX})(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}; \mathfrak{B}, \mathfrak{AB}; Z) \equiv 0\,[X]\,[Z]$$

und daher unter Benutzung von (16): $C_9(Z) \equiv 0\,[Z]$.

[2]) Die Äquivalenz der beiden Bedingungen folgt aus (14) und (15).

[3]) Beweis durch die Spezialisierungen:

a) $(\mathfrak{AX}) = 0,\ (\mathfrak{BX}) \not\equiv 0$; b) $(\mathfrak{AX}) \not\equiv 0,\ (\mathfrak{BX}) = 0$; c) $(\mathfrak{AX}) \not\equiv 0,\ (\mathfrak{BX}) \not\equiv 0$.

$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)$, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)$ und $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}x)$ sich nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Damit kann jeder der beiden ausgearteten Komplexe des Büschels durch:

(28) $$(\mathfrak{E}X) = [(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) + \sqrt{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}x)}\,](\mathfrak{A}X) - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)(\mathfrak{B}X) = 0$$

oder also

(28a) $$(\mathfrak{E}X) - (\mathfrak{B}\mathfrak{B}x)(\mathfrak{A}X) - [(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) - \sqrt{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}x)}\,](\mathfrak{B}X) = 0$$

dargestellt werden, wobei die Quadratwurzel beide Male dieselbe Bedeutung hat; eine dieser beiden Darstellungen bleibt immer brauchbar.

Man darf die beiden ausgearteten Büschelkomplexe $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ jetzt als neue Basiskomplexe wählen. Daraus folgt unmittelbar (wegen $C_6(X, X, x) \equiv 0\,[X]\,[x]$), daß sich die beiden singulären Ebenen nur in einem Punkte schneiden; dieser erweist sich nach (19) als der gemeinsame singuläre Punkt aller nicht ausgearteten Büschelkomplexe.

Die Paare zueinander konjugierter Büschelkomplexe trennen das Paar der ausgearteten Komplexe harmonisch, und auch die Umkehrung gilt.

IIIb. $$\boxed{C_7(x, x) \equiv 0\,[x]}$$

Die beiden Lösungen für $(\mathfrak{A}G) : (\mathfrak{B}G)$ fallen zusammen (vgl. (28) und (28a)!). Der einzige doppelt zählende ausgeartete Büschelkomplex wird bei beliebigem x (vgl. IIIa!) durch mindestens eine der beiden Darstellungen:

(29) $$\begin{aligned}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)(\mathfrak{A}X) - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)(\mathfrak{B}X) &= 0,\\ (\mathfrak{B}\mathfrak{B}x)(\mathfrak{A}X) - (\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)(\mathfrak{B}X) &= 0\end{aligned}$$

geliefert. Seine singuläre Ebene enthält den gemeinsamen singulären Punkt aller nicht ausgearteten Büschelkomplexe. (Beweis durch Wechsel der Basiskomplexe.) Zugleich stellt sich heraus, daß jeder Büschelkomplex zum ausgearteten Komplex konjugiert ist und nur zu diesem.

IV. $$\boxed{\begin{gathered}C_9(X) \equiv 0\,[X],\ C_5(x, X) \equiv 0\,[x]\,[X],\ C_7(x, x) \equiv 0\,[x],\\ C_6(X, X, x) \equiv 0\,[X]\,[x].\end{gathered}}$$

Aus der Voraussetzung $C_6 \equiv 0$ folgen bereits alle übrigen, denn diese ist dem System der drei Bedingungen:

(30) $$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}x) \equiv 0\,[x],\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) \equiv 0\,[x],\ (\mathfrak{B}\mathfrak{B}x) \equiv 0\,[x]$$

äquivalent. (Beweis durch dieselben Spezialisierungen wie Seite 16, Fußnote 3.)

Die Bedingung $C_6(X, X, x) \equiv 0\,[X]\,[x]$ sagt nach (19a) aus, daß alle Komplexe im Büschel ausgeartet sind, so daß die

singulären Ebenen der Büschelkomplexe eine binäre Schar bilden.

Aus (30) folgt ferner, daß auch (vgl. § 6!)

$$C_6(X, Y, x) \equiv 0\,[X]\,[Y]\,[x]$$

ist, das heißt aber nach (20a), daß irgend zwei singuläre Ebenen eine Schnittgerade und daher auch einen Verbindungsraum besitzen. Das gilt natürlich auch von den beiden Basisebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; alle von ihnen linear abhängigen Ebenen, die singulären Ebenen aller Büschelkomplexe, bilden daher im Verbindungsraum von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ das Ebenenbüschel durch die Schnittgerade von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Büschelraum und Büschelachse können durch eine einzige Formel dargestellt werden:

$$C_3(x, \mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}x) - (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}x) = 0.$$

Hält man hierin $\mathfrak{X}$ fest, so wird der Büschelraum geliefert, dargestellt mittels einer willkürlichen Hilfsebene $\mathfrak{X}$. Wird aber x fest gewählt, so stellt $C_3 = 0$ die Büschelachse dar, und zwar mit Hilfe eines willkürlichen Punktes x.

Es ist noch zu zeigen, daß in unserem Falle der Raum von der Hilfsebene $\mathfrak{X}$ und die Gerade vom Hilfspunkt x unabhängig ist. Zunächst erkennt man aus (12), daß die Kombinante C_3 sich hier wegen $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) \equiv 0$ auch in der einfacheren Gestalt:

(31) $$2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}x)$$

darstellen läßt.

Damit die beiden Räume:

$$(\mathfrak{a}x) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}x) = 0$$
$$(\mathfrak{b}x) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}x) = 0$$

identisch seien, muß

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}X) \equiv 0\,[X]$$

sein. In der Tat ist:

$$2\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}X) = (\mathfrak{B}X)\,[2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})] - (\mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}\mathfrak{Y}, X)$$
$$\equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{X}]\,[\mathfrak{Y}]$$

(wegen der Bedingungen (30)).

Ebenso zeigt man die Unabhängigkeit der Geraden vom Hilfspunkt x. Sei

$$(G\mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}p, \mathfrak{X}) = 0$$
$$(H\mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}q, \mathfrak{X}) = 0.$$

Nun setzt die auf Seite 14 (Fußnote 2) angegebene Bedingung für das Zusammenfallen der Geraden G und H ein. Hier ist:

$$2\,(\mathfrak{G}x, \mathfrak{H}x, \mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{X}x)\,[2\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x)\,(\mathfrak{B}pq) - (\mathfrak{B}\mathfrak{B}, p, q, \mathfrak{A}x)] - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}x)\,(\mathfrak{B}p, \mathfrak{B}q, \mathfrak{X}x) \equiv 0\,[x]\,[\mathfrak{X}]\,[p]\,[q],$$

wiederum auf Grund der Identitäten (30).

Die Unsymmetrie der letzten Formeln ist unter unserer jetzigen Voraussetzung $C_6 = 0$ nur scheinbar. Allseitig symmetrische Formeln werden aber umfangreicher und führen überdies zu keinen weiteren Ergebnissen.

§ 8.

Geometrische Deutung der Kombinanten C_4, C_6, C_7, C_8, C_9.

Es soll jetzt die Deutung der Kombinanten, die für gewisse Fälle schon im Voraufgegangenen erfolgt ist, allgemein aufgenommen werden. Dabei sollen zuerst diejenigen Kombinanten betrachtet werden, deren Deutung sich am einfachsten darstellen läßt; im übrigen wollen wir bloße Wiederholungen nach Möglichkeit vermeiden.

Die Kombinante C_9.

Diese existiert nur für den Büscheltyp I und liefert die Ebene $C_9\,(X) = 0$ des Kegelschnitts der singulären Punkte.

Die Kombinante C_4.

Das Verschwinden der Kombinante $C_4\,(Z, X)$ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Geraden Z und X demselben Büschelkomplex angehören. Ist Z gegeben, so stellt

$$C_4\,(Z, X) = 0$$

den Büschelkomplex durch die Gerade Z dar, es sei denn

$$C_4\,(Z, X) \equiv 0\,[X].$$

In diesem Falle liegt Z in allen Büschelkomplexen und ist daher Tetrakomplexgerade (vgl. § 6!).

Der Nullraum eines Punktes x in bezug auf den Büschelkomplex $C_4\,(Z, X) = 0$ hat in laufenden Koordinaten y die Gleichung $C_4\,(Z, xy) = 0$; ist aber $C_4\,(Z, xy) \equiv 0\,[y]$, so ist der Punkt x für den Komplex $C_4\,(Z, X) = 0$ singulär.

Die Kombinante C_6.

A. Bei gegebenem $X = G$ stellt

$$C_6(G, G, \mathfrak{x}) = 0$$

den singulären Punkt des Komplexes $C_4(G, X) = 0$ dar, so daß aus

$$C_6(G, G, \mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$$

folgt, daß dieser Komplex ausgeartet ist.

Bei veränderlichem G liefert die Gleichung $C_6(G, G, \mathfrak{x}) = 0$ eine Parameterdarstellung des Ortes der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe, in der allerdings zwei verschiedene Gerade G_1 und G_2 nur dann auch verschiedene Punkte liefern, wenn $C_4(G_1, G_2) \neq 0$ ist.

B. Bei gegebenem $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}$ ist

$$C_6(X, X, \mathfrak{r}) = 0$$

eine in $(\mathfrak{A}X):(\mathfrak{B}X)$ quadratische Gleichung. Sie definiert die Büschelkomplexe, die singuläre Punkte im Raume $\mathfrak{r}$ haben. Daher wird diese Gleichung bei beliebigem $\mathfrak{r}$ von jedem ausgearteten Büschelkomplex erfüllt.

Die Identität

$$C_6(X, X, \mathfrak{r}) \equiv 0\,[X]$$

gilt für solche Räume $\mathfrak{r}$, die von jedem Büschelkomplex singuläre Punkte enthalten.

Die Kombinante C_7.

Die Bildung $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ erweist sich als Diskriminante der quadratischen Gleichung $C_6(X, X, \mathfrak{r}) = 0$.

Für die gemeinsame Betrachtung der beiden Kombinanten C_6 und C_7 ist es zweckmäßig, die einzelnen Büscheltypen gesondert zu behandeln.

I. Die beiden, dem Raum $\mathfrak{r}$ vermöge $C_6 = 0$ zugeordneten Büschelkomplexe sind die, deren singuläre Punkte auf der Schnittgeraden von $\mathfrak{r}$ mit der Ebene $C_3 = 0$ liegen. Für $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$ wird diese Schnittgerade Tangente des Kegelschnitts der singulären Punkte.

Daher kann man hier den quadratischen Raumort

$$C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$$

als Tangentialmannigfaltigkeit des Ortes der singulären Punkte bezeichnen. Sie umfaßt dann alle Räume durch

wenigstens eine Tangente des Singularitätenortes. Die Identität $C_6(X, X, \mathfrak{r}) \equiv 0\,[X]$ wird durch alle Räume $\mathfrak{r}$ erfüllt, welche die Ebene $C_9 = 0$ enthalten.

II. Die eine Lösung von $C_6 = 0$ stellt der ausgeartete Büschelkomplex dar. Der zweite Büschelkomplex ist nicht ausgeartet, sein singulärer Punkt ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{r}$ mit der Ortsgeraden der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe. Ist aber $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$, so läuft der Raum $\mathfrak{r}$ durch den Hauptpunkt, und der zweite Büschelkomplex fällt mit dem ausgearteten zusammen, es sei denn

$$C_8(X, X, \mathfrak{r}\mathfrak{x}) \equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{x}];$$

in diesem Falle wird $C_6(X, X, \mathfrak{r}) \equiv 0\,[X]$, und der Raum $\mathfrak{r}$ enthält die Gerade $C_8(X, X, \mathfrak{X}) = 0$ ganz.

. Hier ist

$$C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$$

die Gesamtheit aller Räume durch den Hauptpunkt.

IIIa. Als Lösungen von $C_6 = 0$ treten stets die beiden ausgearteten Büschelkomplexe auf. Für $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$ dagegen wird $C_6 \equiv 0\,[X]$.

Durch $C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$ werden alle Räume durch den Punkt dargestellt, der für alle Büschelkomplexe singulär ist.

IIIb. Hier ist $C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$. Dem Raume $\mathfrak{r}$ entspricht stets doppelt zählend der ausgeartete Büschelkomplex. Für Räume $\mathfrak{r}$ durch den singulären Punkt der übrigen Büschelkomplexe wird $C_6 \equiv 0\,[X]$.

IV. Für diesen Büscheltyp ist $C_6(X, X, \mathfrak{x}) \equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{x}]$, $C_7(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$.

Nochmals die Kombinante C_7.

Jeder Raum, welcher der Gleichung $C_7 = 0$ genügt, enthält die Gesamtheit der kovarianten Punkte wenigstens eines Büschelkomplexes mit allen übrigen (soweit diese kovarianten Punkte existieren). Die Umkehrung gilt ebenfalls[1]).

[1]) Soll der Raum $\mathfrak{r}$ die Gesamtheit der kovarianten Punkte des Komplexes $C_4(G, X) = 0$ mit allen übrigen Büschelkomplexen $C_4(Y, X) = 0$ enthalten, so muß nach § 6, (20)

$$C_6(G, Y, \mathfrak{r}) \equiv 0\,[Y]$$

sein. Diese Identität kann durch das System der beiden Gleichungen:

$$(*)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{r}) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{r}) &= 0 \\ (\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{r}) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{r}) &= 0 \end{aligned}$$

ersetzt werden. Damit diese keinen Widerspruch zur Voraussetzung $C_4(G, X) \not\equiv 0\,[X]$ hervorrufen, muß ihre Determinante $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ verschwinden. Die Bedingung $C_7(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = 0$ ist also notwendig; es bleibt zu beweisen, daß sie auch hinreichend ist. Sei also jetzt $C_7 = 0$. Dann gibt es wenigstens einen Büschelkomplex $C_4(G, X) = 0$, für den die Gleichungen (*) erfüllt sind, dessen kovariante Punkte also alle in $\mathfrak{r}$ liegen.

Die Kombinante C_8.

A. Bei festem $X = G$ gibt

$$C_8(G, G, \mathfrak{X}) = 0$$

(unter der Voraussetzung $C_4(G, X) \not\equiv 0\,[X]$) eine gerade Linie, den Ort aller kovarianten Punkte, die zum Büschelkomplex $C_1(G, X) = 0$ gehören[1]).

Sie existiert nur für die Typen I und II, und ist bei Typ I Tangente des Kegelschnitts der singulären Punkte im singulären Punkt des Komplexes $C_4(G, X) = 0$; für Typ II vergleiche man § 7.

B. Bei festem $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ ist

$$C_8(X, X, \mathfrak{E}) = 0$$

eine in $(\mathfrak{A}X) : (\mathfrak{B}X)$ quadratische Gleichung, durch welche diejenigen Büschelkomplexe bestimmt sind, deren kovarianter Punkt in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegt; bei verschwindender Diskriminante wird der Büschelkomplex geliefert, der singuläre Punkte in der Ebene $\mathfrak{E}$ hat.

Die Identität:

$$C_8(X, X, \mathfrak{E}) \equiv 0\,[X]$$

sagt nach dem Vorhergehenden aus, daß die Ebene $\mathfrak{E}$ von allen Geraden $C_8(G, G, \mathfrak{X}) = 0$ getroffen wird, d. i. daß sie zu jedem Büschelkomplex wenigstens einen kovarianten Punkt enthält.

Für die beiden allein in Frage kommenden Typen I und II ist noch Folgendes zu sagen:

Bei Typ I wird die Identität $C_8 \equiv 0\,[X]$ durch die Ebenen erfüllt, welche die Ebene $C_9 = 0$ (wenigstens) in einer Geraden schneiden. Anderenfalls hat $\mathfrak{E}$ mit $C_9 = 0$ nur einen Schnittpunkt gemeinsam. Dieser ist im Allgemeinen kovarianter Punkt zweier getrennter Büschelkomplexe; verschwindet dagegen die Diskriminante

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) - \frac{1}{4}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{E})^2$$

der quadratischen Gleichung $C_8(X, X, \mathfrak{E}) = 0$, so ist dieser Punkt singulär für einen Büschelkomplex.

---

[1]) Sei $(H\mathfrak{X}) \equiv C_8(G, G, \mathfrak{X})$, und sei $(p\mathfrak{x}) \equiv C_6(Y, Z, \mathfrak{x}) = 0$ der kovariante Punkt der Büschelkomplexe $C_4(Y, X) = 0$ und $C_4(Z, X) = 0$. Dann ist:

$$(HpX) \equiv C_9(X)\,C_4(Y, G)\,C_4(Z, G).$$

Hieraus erkennt man zunächst nochmals (vgl. § 7 II!), daß beim Typ II die Gerade H überhaupt alle kovarianten Punkte enthält, die die Büschelkomplexe miteinander bestimmen. Sollen jetzt nur die kovarianten Punkte des Büschelkomplexes $C_4(G, X) = 0$ betrachtet werden, so haben wir $C_4(Z, G) = 0$ zu setzen. Dann ist aber

$$(HpX) \equiv 0\,[X],$$

wie auch Y gewählt wird; damit ist die Richtigkeit der im Text aufgestellten Behauptung bewiesen.

Daher ist

$$(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{X})\,(\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{X}) - \frac{1}{4}\,(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{X})^2 = 0$$

der Ort aller Ebenen, die wenigstens einen singulären Punkt enthalten.

Bei Typ II bedeutet $C_8 \equiv 0\,[X]$, daß $\mathfrak{E}$ die Ortsgerade (23) der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe trifft. Die Diskriminante von $C_8 = 0$ verschwindet hier identisch[1]) für alle $\mathfrak{E}$.

Die beiden Büschelkomplexe, die $\mathfrak{E}$ zugeordnet sind, fallen immer zusammen, und zwar wird unabhängig von der Wahl der Ebene $\mathfrak{E}$ stets der einzige ausgeartete Büschelkomplex geliefert[2]).

§ 9.

Die Kombinante C_2.

A. Die Ebene $\mathfrak{E}$ sei fest.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ enthält im allgemeinen ein Büschel von Geraden aus dem Pentakomplex $\mathfrak{A}$ durch den Punkt[3]) $(\mathfrak{AEx}) = 0$ und ein solches aus dem Pentakomplex $\mathfrak{B}$ vom Scheitel $(\mathfrak{BEx}) = 0$.

Daher liegt in ihr im allgemeinen nur eine Tetrakomplexgerade:

$$C_2\,(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{AE}, \mathfrak{BE}, \mathfrak{X}) = 0.$$

Diese enthält zugleich die Nullpunkte der Ebene $\mathfrak{E}$ in bezug auf alle Büschelkomplexe.

---

[1]) Der Beweis ergibt sich aus der Identität:

$$C_9\,(\mathfrak{AE}, \mathfrak{BE}) \equiv (\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{AE}, \mathfrak{BE})$$

$$\equiv -\,[(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{E}) - \frac{1}{4}\,(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{E})^2] \equiv 0\,[\mathfrak{E}],$$

da $C_9 \equiv 0\,[X]$ ist. Gleichzeitig ist durch diese Identität die Diskriminante durch die Kombinante C_9 dargestellt. (Beweis der Identität durch (16), I_2, I_{5a} und I_{5b}.)

[2]) Der Büschelkomplex, welcher der Ebene $\mathfrak{E}$ zugeordnet wird, kann hier durch wenigstens eine der beiden Gleichungen:

$$2\,(\mathfrak{AA}, \mathfrak{AB}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{BX}) + (\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{AX}) = 0$$
$$(\mathfrak{BB}, \mathfrak{AA}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{BX}) + 2\,(\mathfrak{AB}, \mathfrak{BB}, \mathfrak{E})\,(\mathfrak{AX}) = 0$$

dargestellt werden. Diese können mittels der Identität I_{5a} auf die Gestalt:

$$4\,C_5\,(\mathfrak{AE}, X) = 0$$

und

$$-\,4\,C_5\,(\mathfrak{BE}, X) = 0$$

gebracht werden. Beide Gleichungen liefern aber unabhängig von $\mathfrak{E}$ den ausgearteten Büschelkomplex. (Vgl. § 7 II!)

[3]) Vgl. § 3, S. 7!

Ist aber: $$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}],$$

so gibt es wenigstens einen Büschelkomplex $C_4(G, X) = 0$, für den

$$C_4(G, \mathfrak{E}x) \equiv (\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{E}x) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{B}\mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x],$$

also die Ebene $\mathfrak{E}$ erzeugend ist.

Sei jetzt

a) $$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}],\ C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x]\,[X].$$

Dann ist $\mathfrak{E}$ nur in einem Büschelkomplex erzeugend und hat in bezug auf alle übrigen einen gemeinsamen Nullpunkt, der bei beliebigem[1]) G durch

$$C_4(G, \mathfrak{E}x) = 0$$

dargestellt werden kann, und gleichzeitig Scheitel des in $\mathfrak{E}$ liegenden Büschels von Tetrakomplexgeraden ist. Solche Ebenen wollen wir Büschelebenen des Tetrakomplexes nennen.

Ist dagegen

b) $$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}],\quad C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x]\,[X],$$

so ist $\mathfrak{E}$ gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe; ihr ganzes Geradenfeld gehört dem Tetrakomplex an[2]).

Daher können wir als Ergebnis folgenden Satz formulieren:

Jede Ebene $\mathfrak{E}$, die ein Büschel von Tetrakomplexgeraden enthält, ist für wenigstens einen Büschelkomplex erzeugend, und jede erzeugende Ebene irgend eines Büschelkomplexes enthält wenigstens ein Büschel von Durchschnittsgeraden. Gehört jede Gerade von $\mathfrak{E}$ dem Tetrakomplex an, so ist $\mathfrak{E}$ gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe, und auch die Umkehrung gilt.

---

[1]) Die beiden Punkte: $(px) \equiv C_4(G, \mathfrak{E}x) = 0$
$(qx) \equiv C_4(H, \mathfrak{E}x) = 0$
fallen unter der Voraussetzung: $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$ zusammen, denn es ist:

$$(pq\mathfrak{X}) \equiv C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X})\, C_4(H, G).$$

[2]) Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung folgt sofort aus der Deutung von $C_4(Z, X)$ in § 8.

B. Die Ebene $\mathfrak{X}$ sei fest, $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$.

Dann schreiben wir die Kombinante am besten in der Gestalt:

$$C_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{F}).$$

Die Gleichung $C_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{F}) = 0$ liefert dann die quadratische Mannigfaltigkeit aller Ebenen durch sämtliche Tetrakomplexgeraden, die die Ebene $\mathfrak{F}$ treffen[1]); insbesondere wird sie immer durch alle Büschelebenen des Tetrakomplexes erfüllt.

Die Identität $C_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{F}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$ kann beim Typ I für keine Ebene $\mathfrak{F}$ erfüllt werden. Bei den Typen II bis IV wird sie durch die singulären Ebenen der ausgearteten Büschelkomplexe befriedigt, beim Typ IV außerdem noch durch alle anderen Ebenen des Raumes $C_3(x, \mathfrak{X}) = 0$ (vgl. § 7!).

§ 10.

Die Kombinante C_1.

A. Der Punkt x sei fest: $x = p$.

1). $\boxed{C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X].}$

Die Gleichung $C_1(p, p, X) = 0$ stellt die gemeinsame Schnittebene aller Nullräume des Punktes p dar. Diese Ebene wollen wir Nullebene des Punktes p nennen. Sie ist die Ebene des durch den Punkt p laufenden Büschels von Tetrakomplexgeraden[2]).

Punkte dieser Art ($C_1 \equiv 0\,[X]$) sollen Büschelpunkte heißen.

Ist dagegen

$$C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X],$$

so gibt es wenigstens einen Büschelkomplex $C_4(G, X) = 0$ so, daß:

$$C_4(G, px) \equiv (\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}px) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{B}px) \equiv 0\,[x]$$

ist, oder also: Der Punkt p ist für wenigstens einen Büschelkomplex singulär[3]).

---

[1]) Einen speziellen Fall einer solchen Mannigfaltigkeit haben wir bereits auf Seite 23 (für den Büscheltyp I) in der Gesamtheit aller Treffebenen des Singularitätenortes kennengelernt. Diese Ebenen werden durch die Gleichung $C_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{F}) = 0$ bei der Spezialisierung $(\mathfrak{F}X) \equiv C_9(X) = 0$ geliefert.

[2]) Man beweist leicht, daß die Ebene $C_1(p, p, X) = 0$ der in § 9 A behandelten Bedingung $C_2 \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$ genügt. Sie ist daher Büschelebene oder gemeinsame erzeugende Ebene gemäß der dort eingeführten Benennung.

[3]) Vgl. § 8, die Kombinante C_4!

Wenn umgekehrt p singulärer Punkt des Büschelkomplexes $C_4(G, X) = 0$ ist, so gilt:

$$C_4(G, px) \equiv 0\,[x],$$

und daher auch[1]):

$$C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X].$$

Man hat also zu unterscheiden zwischen dem Ort der singulären Punkte der nicht ausgearteten Büschelkomplexe, der durch $C_6(X, X, \mathfrak{x}) = 0$ dargestellt werden kann (§ 6 und § 8), und dem Ort aller singulären Punkte, der durch $C_1(x, x, X) \equiv 0\,[X]$ geliefert wird.

Für die singulären Punkte sind noch zwei Fälle möglich:

2a). $\boxed{C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X],\ C_4(G, px) \not\equiv 0\,[x]\,[G].}$

Der Punkt p ist singulär für einen einzigen Büschelkomplex. Seine Nullräume in bezug auf alle anderen Büschelkomplexe fallen zusammen.

Daher läuft durch p ein Bündel von Tetrakomplexgeraden, das in dem gemeinsamen Nullraum liegt. Ein solcher Punkt heiße Bündelpunkt.

Der Raum des Bündels kann bei beliebigem G durch

$$C_4(G, px) = 0$$

dargestellt werden.

2b). $\boxed{C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X],\ C_4(G, px) \equiv 0\,[x]\,[G].}$

In diesem Falle ist p gemeinsamer singulärer Punkt aller Büschelkomplexe; das ganze Geradengebüsch durch ihn gehört dem Tetrakomplex an. Ein solcher Punkt heiße Gebüschpunkt.

Wie aus der Klassifikation in § 7 hervorgeht, können Gebüschpunkte nur bei den Typen IIIa, IIIb und IV auftreten, und zwar gibt es für die Typen IIIa und IIIb einen solchen Punkt, für Typ IV dagegen deren ∞^1, welche die Büschelachse $C_3(q, \mathfrak{X}) = 0$ erfüllen.

---

[1]) Führt man in $C_4(G, px)$ für x den Schnittpunkt q einer beliebigen Geraden X mit dem Raume $(ry) \equiv C_4(H, py) = 0$ ein (wobei H nur der Einschränkung $C_4(G, H) \not\equiv 0$ unterliegen soll), so ist:

$$C_4(G, pq) \equiv C_1(p, p, X)\, C_4(H, G).$$

Aus $C_4(G, px) \equiv 0\,[x]$ folgt auch $C_4(G, pq) = 0$ bei beliebigem X; das heißt aber nach unserer Identität:

$$C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X].$$

Die Reduzibilität des Ortes aller singulären Punkte beim Büscheltyp IV zeigt die leicht herzuleitende Identität:

$$(32)\qquad \begin{aligned} 2\,[(\mathfrak{A}p,\,\mathfrak{B}p,\,X)\;(\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X}) + (\mathfrak{A}p,\,\mathfrak{B}p;\,\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{B}\mathfrak{Y})\;(\mathfrak{X}X) \\ - (\mathfrak{A}p,\,\mathfrak{B}p,\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,X)] \equiv \\ [(\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{B}p) - (\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{A}p)]\,[(\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{B}p,\,X) - (\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{A}p,\,X)] \\ - [(\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{B}p,\,X)\;(\mathfrak{A}\mathfrak{A},\,\mathfrak{Y}p) + (\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{A}p,\,X)\;(\mathfrak{B}\mathfrak{B},\,\mathfrak{Y}p) \\ - \{(\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{A}p,\,X) + (\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{B}p,\,X)\}\;(\mathfrak{A}\mathfrak{B},\,\mathfrak{Y}p)]. \end{aligned}$$

Hierbei sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ beliebige Geradenpentakomplexe. Das letzte Glied rechts fällt bei Typ IV wegen

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A},\,\mathfrak{Y}p) \equiv 0,\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B},\,\mathfrak{Y}p) \equiv 0,\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B},\,\mathfrak{Y}p) \equiv 0$$

fort. Ist überdies $C_1\,(p,\,p,\,X) \equiv 0\,[X]$, so verschwindet die ganze linke Seite identisch, wie auch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gewählt werden; damit das auch für die rechte Seite der Fall ist, muß p entweder im Raume $C_3\,(x,\,\mathfrak{Y}) = 0$ liegen, dessen Unabhängigkeit von $\mathfrak{Y}$ beim Typ IV schon gezeigt ist (§ 7), oder aber (zweiter Faktor) es ist:

$$(33)\qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{B}p,\,X) - (\mathfrak{B}\mathfrak{Y},\,\mathfrak{X};\,\mathfrak{A}p,\,X) \equiv 0\,[X]\,[\mathfrak{x}]\,[\mathfrak{Y}].$$

Auch hier liegt der Punkt p im Raume $C_3\,(x,\,\mathfrak{Y}) = 0$, ist jedoch an die Achse des Büschels der singulären Ebenen gebunden[1]).

B. Die Gerade X sei fest: $X = G$.

Die Gleichung $C_1\,(x,\,x,\,G) = 0$ stellt die quadratische Mannigfaltigkeit aller (nicht singulären) Punkte dar, deren Nullebenen die Gerade G treffen, und außerdem alle singulären Punkte aller Büschelkomplexe.

Diese $M^2{}_3$ erhält man als Gesamtheit aller Punkte auf allen Tetrakomplexgeraden, welche die Gerade G treffen.

Da jeder Punkt von G Scheitel wenigstens eines Büschels von Tetrakomplexgeraden ist, so liegen auf $M^2{}_3$ stets Ebenen; der Rang unserer $M^2{}_3$ ist daher höchstens vier; sie hat wenigstens einen singulären Punkt.

---

[1]) Setzt man $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, wobei $(\mathfrak{X}\mathfrak{x}\mathfrak{x}) \equiv (q\mathfrak{x}) \not\equiv 0\,[\mathfrak{x}]$ sein soll, so kann man den zweiten Faktor mittels I_{5a} auf die Gestalt

$$\frac{1}{2}\,[(\mathfrak{A}q,\,\mathfrak{B}p,\,X) - (\mathfrak{B}q,\,\mathfrak{A}p,\,X)]$$

bringen. Verschwindet dieser Ausdruck identisch in q und X, so liegt der Punkt p (vgl. § 7!) auf der Achse des Büschels der singulären Ebenen.

Ist umgekehrt p ein Punkt dieser Geraden, so ist: $(\mathfrak{A}px) \equiv 0\,[x]$, $(\mathfrak{B}px) \equiv 0\,[x]$, und daraus folgt, daß dann die Bedingung (33) erfüllt ist.

Im allgemeinen ist der Rang von M^2_3 vier, es liegt nur ein singulärer Punkt vor. Dieser heißt

(34) $$(px) = C_6(G, G, x) + 2\,C_5(Gx, G) = 0.$$

Er kann auch auf andere Weise erklärt werden: Durch die Gerade G läuft (im allgemeinen) ein Büschelkomplex $C_1(G, X) = 0$: unter seinen erzeugenden Ebenen gibt es eine, die G ganz enthält (die Verbindungsebene von G mit dem singulären Punkt $C_6(G, G, x) = 0$). Sie ist (§ 9) Büschelebene des Tetrakomplexes. Der Punkt (34) ist jetzt der Scheitel dieses Büschels. Schließlich kann dieser Punkt auch noch als gemeinsamer Schnittpunkt der Nullebenen aller Punkte der Geraden G gedeutet werden. Wir haben ihn mittels des singulären Punktes $C_6(G, G, x) = 0$ und eines Punktes $C_5(Gx, G) = 0$ der Geraden[1]) G dargestellt.

Jetzt wenden wir uns zu den Sonderfällen. Für

(34a) $$C_6(G, G, x) + 2\,C_5(Gx, G) \equiv 0\,[x]$$

ist der Rang der M^2_3 höchstens drei.

Wir richten unser Augenmerk auf die beiden Punkte

$$C_6(G, G, x) = 0 \text{ und } C_5(Gx, G) = 0.$$

Sie können nach (34a) nur gleichzeitig unbestimmt werden.

1. $C_6 \equiv 0\,[x]$. Die beiden Punkte existieren und fallen zusammen; da $C_5(Gx, G) = 0$ auf der Geraden G liegt, so tut es auch $C_6(G, G, x) = 0$. Die Gerade G enthält wenigstens einen singulären Punkt.

2. $C_6 \equiv 0\,[x]$. Beide Punkte werden unbestimmt. Dann ist entweder G Tetrakomplexgerade, oder G gehört einem ausgearteten Büschelkomplex an. In letzterem Falle enthält sie ebenfalls wenigstens einen singulären Punkt.

Notwendig und hinreichend dafür, daß der Rang unsere M^2_3 kleiner als vier wird, ist, daß G entweder dem Tetrakomplex angehört, oder wenigstens einen singulären Punkt enthält. Wir beweisen jetzt zwei Sätze, von denen der zweite eine ganze Anzahl von Einzelfällen umspannt.

Satz a: Ist die Gerade G Tetrakomplexgerade, ohne einen singulären Punkt zu enthalten (in der nachfolgenden Aufzählung der Fall B 3), so hat die M^2_3 den Rang drei, und G ist ihre singuläre Gerade; auch die Umkehrung gilt.

Satz b: Enthält die Gerade G wenigstens einen singulären Punkt, so ist der Rang der M^2_3 kleiner als drei.

[1]) Damit der Punkt $(qx) \equiv C_5(Gx, G) = 0$ auf der Geraden G liege, muß $(GqX) \equiv 0\,[X]$ sein. Hier ist:

$$2\,(GqX) \equiv C_5(GG, X; G).$$

Der Ausdruck verschwindet identisch, da wir $(GGx) \equiv 0\,(x)$ vorausgesetzt haben. (G soll eine Gerade sein.)

a. Durch die Forderung in Satz a sind die Büscheltypen, bei denen es ausgeartete Büschelkomplexe gibt, ausgeschlossen. Es ist also $C_9 \not\equiv 0$.

Wir zeigen zuerst, daß jeder Punkt von G für die $M^2{}_3$ singulär ist. Es ist

$$C_1(Gr, x, G) \equiv C_4(Gr, x; G) + C_3(x; GG, r). \tag{35}$$

Der zweite Summand verschwindet identisch, da $(GGy) \equiv 0\,[y]$ sein soll. Ferner ist $C_4(Gr, x; G) \equiv 0[x]\,[r]$, da nach Voraussetzung G dem Tetrakomplex angehört[1]). Daher ist hier

$$C_1(Gr, x, G) \equiv 0\,[x]\,[r],$$

und der Beweis ist erbracht. Damit ist der Rang von $M^2{}_3$ h ö c h s t e n s drei. Da die Ebene $C_9(X) = 0$ mit der $M^2{}_3$ einen i r r e d u z i b l e n Kegelschnitt gemeinsam hat, so ist der Rang als drei erwiesen, weil die Ebene $C_9 = 0$ nicht ganz auf $M^2{}_3$ liegt[2]).

b. Zunächst zeigen wir, d a ß f ü r j e d e G e r a d e G, d i e e i n e n s i n g u l ä r e n P u n k t e n t h ä l t, d e r R a n g d e r $M^2{}_3$ h ö c h s t e n s zwei ist, daß diese also r e d u z i b e l ist.

Sei $(G\mathfrak{s}x) = 0$ ein Punkt auf G, der für den Büschelkomplex $C_4(H, X) = 0$ singulär ist, und sei $(Grx) = 0$ irgendein weiterer Punkt der Geraden G. (Es soll also $(G\mathfrak{s}r) \not\equiv 0$ sein.)

In der Identität[3]):

$$\begin{aligned} &C_1(x, x, G)\, C_4(H, Z)\, (Gr\mathfrak{s}) \equiv \\ &C_4(Z; Gr, x)\, C_4(H; G\mathfrak{s}, x) - C_4(Z; G\mathfrak{s}, x)\, C_4(H; Gr, x) \end{aligned} \tag{36}$$

ist $C_4(H; G\mathfrak{s}, x) \equiv 0\,[x]$, da $(G\mathfrak{s}x) = 0$ singulärer Punkt des Komplexes $C_4(H, X) = 0$ sein soll (vgl. § 8!); damit ist die Reduzibilität bewiesen. Die $M^2{}_3$ besteht also aus:

1. dem gemeinsamen Nullraum $C_4(Z; G\mathfrak{s}, x) = 0$ des singulären Punktes in bezug auf alle Büschelkomplexe, für die der Punkt nicht singulär ist,

2. dem Nullraum $C_4(H; Gr, x) = 0$ der Geraden G in bezug auf den Büschelkomplex $C_4(H, X) = 0$, für den der Punkt $(G\mathfrak{s}x) = 0$ singulär ist (vgl. § 3, Seite 6!).

[1]) Vgl. § 8, die Kombinante C_4!

[2]) Es genügt, zu zeigen, daß ein Punkt, etwa $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) = 0$, der Ebene $C_9(X) = 0$ nicht auf $M^2{}_3$ liegt. Nach (16) ist

$$4\, C_1(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, G) \equiv C_9(G).$$

Läge der Punkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}x) = 0$ auf $M^2{}_3$, so müßte $C_9(G) = 0$ sein, d. i. die Tetrakomplexgerade G müßte die Ebene $C_9(X) = 0$ treffen, und zwar nach Voraussetzung in einem nicht singulären Punkte. Alle Tetrakomplexgeraden durch einen solchen Punkt liegen aber in der Ebene $C_9 = 0$ (vgl. § 11, S. 33!), enthalten also wenigstens einen singulären Punkt. Die Gerade G enthielte also entgegen der Voraussetzung einen singulären Punkt.

[3]) Diese Identität gilt nur unter der Voraussetzung $(GGx) \equiv 0\,[x]$. Z soll eine ganz beliebige Gerade außerhalb des Komplexes $C_4(H, X) = 0$ sein, d. i. $C_4(Z, H) \not\equiv 0$.

Durch die Betrachtung dieser beiden Faktoren lassen sich jetzt leicht die Fälle angeben, in denen $C_1(x, x, G) \equiv 0\,[x]$ ist, die $M^2{}_3$ also den Rang null hat. Das tritt entweder ein, wenn

1. $C_4(Z; G\mathfrak{s}, x) \equiv 0\,[x]\,[Z]$ ist, d. i. wenn der Punkt $(G\mathfrak{s}x) = 0$ gemeinsamer singulärer Punkt aller Büschelkomplexe ist (solche Punkte gibt es nur bei den Typen IIIa, IIIb und IV), oder wenn

2. $C_4(H; G\mathfrak{r}, x) \equiv 0\,[x]\,[\mathfrak{r}]$ ist, d. i. wenn jeder Punkt der Geraden G für den Komplex $C_4(H, X) = 0$ singulär ist. Das ist nur möglich, wenn dieser Komplex ausgeartet ist und G in seiner singulären Ebene liegt.

Diese beiden Bedingungen für den Rang null lassen sich in das eine Kriterium:

$$C_2(Gx, Gx, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[x]\,[\mathfrak{X}]$$

zusammenfassen[1]). Nach § 9 bedeutet diese Identität: Jede Ebene durch G ist Büschelebene des Tetrakomplexes oder gemeinsame erzeugende Ebene.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wann die beiden Räume

$$(\mathfrak{v}x) \equiv C_4(Z; G\mathfrak{s}, x) = 0, \quad (\mathfrak{w}x) \equiv C_4(H; G\mathfrak{r}, x) = 0$$

zusammenfallen, d. i. wann der Rang der $M^2{}_3$ eins ist.

Damit das der Fall ist, muß $(\mathfrak{v}\mathfrak{w}X) \equiv 0\,[X]$ sein, wie auch Z und $\mathfrak{r}$ gewählt werden.

Unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$(GGx) \equiv 0\,[x], \quad C_4(H; G\mathfrak{s}, x) \equiv 0\,[x]$$

gilt die Identität:

$$(37) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{w}X) \equiv$$
$$(G\mathfrak{s}\mathfrak{r})\,[C_4(H, G)\,C_4(Z, X) + C_4(H, X)\,C_4(Z, G) - C_6(Z, H, GX)].$$

Da die Gerade G einen singulären Punkt des Komplexes $C_4(H, X) = 0$

[1]) Es gilt die Identität:

$$C_2(Gx, Gx, \mathfrak{X}) \equiv (G\mathfrak{X})\,C_1(x, x, G) - C_4(G; \mathfrak{X}x, Gx) - \frac{1}{2}\,C_1(x; x; GG, \mathfrak{X}).$$

Ist G eine Gerade, also $(GGx) \equiv 0\,[x]$, so fällt rechts der letzte Summand fort.

Verschwindet jetzt die linke Seite (vgl. Text!) identisch in x und $\mathfrak{X}$, so tut sie es auch bei beliebigem Y für $(\mathfrak{X}X) \equiv (YxX)$. Bei dieser Wahl von $\mathfrak{X}$ bleibt rechts nur das Glied: $(GYx)\,C_1(x, x, G)$ übrig, so daß aus dem identischen Verschwinden der linken Seite folgt: $C_1(x, x, G) \equiv 0$. (Der erste Faktor (GYx) kann nicht in x und Y identisch verschwinden.)

enthält und daher diesem angehört, ist $C_4(H, G) = 0$. Die beiden Räume $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ fallen also zusammen, wenn

(37a) $$C_4(H, X)\, C_4(Z, G) - C_6(Z, H, GX) \equiv 0\,[X]\,[Z]$$

ist. Hieraus folgen die beiden Bedingungen[1])

$$C_4(Z, G) \equiv 0\,[Z], \quad C_6(Z, H, GX) \equiv 0\,[X]\,[Z].$$

Die erste sagt aus, daß G Tetrakomplexgerade sein muß, die zweite bedeutet, daß die Gerade G alle kovarianten Punkte des Komplexes $C_4(H, X) = 0$ enthalten muß.

Damit der Rang der $M^2{}_3$ eins ist, muß die Gerade G dem Tetrakomplex angehören; ferner muß auf ihr wenigstens ein Komplex einen singulären Punkt haben; die Gerade G muß dann außerdem noch alle kovarianten Punkte enthalten, die dieser Komplex mit den übrigen Büschelkomplexen bestimmt.

Enthält die Gerade G einen gemeinsamen singulären Punkt aller Büschelkomplexe, oder liegt sie ganz in der singulären Ebene eines ausgearteten Komplexes, so ist der Rang der $M^2{}_3$ null.

Nachdem die geometrische Bedeutung der einzelnen Fälle genügend auseinandergesetzt ist, erscheint es angemessen, die verwickelten Verhältnisse noch einmal kurz durch die Zusammenstellung der analytischen Kriterien zu beleuchten. Bedeute r den Rang der $M^2{}_3$; die Kombinanten sollen für folgende Argumente gebildet werden:

$$C_2 = C_2(Gx, Gx, X), \quad C_4 = C_4(G, X), \quad C_5 = C_5(Gx, G),$$
$$C_6 = C_6(G, G, x), \quad C_9 = C_9(G).$$

Das identische Verschwinden einer Kombinante soll stets in allen darin vorkommenden Variablen stattfinden.

A. $C_6 + 2\,C_5 \not\equiv 0$ $\qquad r = 4$

B. $C_6 + 2\,C_5 \equiv 0$

1. $C_6 \not\equiv 0$ $\qquad r = 2$
2. $C_6 \equiv 0, \quad C_4 \not\equiv 0$
   a) $C_2 \not\equiv 0$ $\qquad r = 2$
   b) $C_2 \equiv 0$ $\qquad r = 0$
3. $C_6 \equiv 0, \quad C_4 \equiv 0, \quad C_9 \not\equiv 0$ $\qquad r = 3$

[1]) Spezialisiert man X als Treffgerade von G, also $(X\mathfrak{X}) \equiv (G\mathfrak{y}, p, \mathfrak{X})$, wo $\mathfrak{y}$ und p beliebig sind, so verschwindet $C_6(Z, H, GX)$, und es bleibt nur

$$C_4(H; G\mathfrak{y}, p)\, C_4(Z, G).$$

Würde $C_4(H; G\mathfrak{y}, p)$ verschwinden, wie auch p und $\mathfrak{y}$ gewählt werden, so wäre jeder Punkt von G singulär im Komplex $C_4(H, X) = 0$. Diesen Fall, der, wie wir oben gezeigt haben, eine $M^2{}_3$ vom Rang null liefert, können wir hier ausschließen. Daher folgt aus der Identität (37a): $C_4(Z, G) \equiv 0\,[Z]$ und damit auch $C_6(Z, H, GX) \equiv 0\,[Z]\,[X]$.

4. $C_6 \equiv 0, \quad C_4 \equiv 0, \quad C_9 = 0, \quad C_2 \not\equiv 0$

a) $C_6 (Z, H; GX) \not\equiv 0\ [Z]\ [X]$[1]) $\qquad r = 2$

b) $C_6 (Z, H; GX) \equiv 0\ [Z]\ [X] \qquad r = 1$

5. $C_6 \equiv 0, \quad C_4 \equiv 0, \quad C_9 = 0, \quad C_2 \equiv 0 \qquad r = 0.$

§ 11.

Die Kombinante C_5.

A. Der Punkt x sei fest: x = p.

Die Gleichung $C_5 (p, X) = 0$ stellt (bei nicht singulärem p) den Büschelkomplex dar, für den die Nullebene des Punktes p erzeugend ist. Gilt aber die Identität

$$C_5 (p, X) \equiv 0\ [X],$$

so ist die Nullebene von p gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe.

Die Nullebene des nicht singulären Punktes p heißt:

$$(\mathfrak{E}X) \equiv C_1 (p, p, X) = 0$$

und ist (§ 9 und § 10) erzeugend für wenigstens einen Büschelkomplex. Sei ein solcher:

$$(\mathfrak{K}X) \equiv C_4 (G, X) = 0.$$

Dann reduziert sich die Bedingung:

$$(38) \qquad (\mathfrak{K}\mathfrak{E}x) \equiv -(px)\, C_5 (p, G) \equiv 0\ [x]$$

auf $C_5 (p, G) = 0$.

Damit die Ebene $C_1 (p, p, X) = 0$ erzeugend für den Büschelkomplex $C_4 (G, X) = 0$ ist, ist notwendig und hinreichend: $C_5 (p, G) = 0$. Diese geraden Linien G erfüllen den Büschelkomplex $C_5 (p, X) = 0$, oder es ist

$$C_5 (p, X) \equiv 0\ [X],$$

d. h.: Die Nullebene von p ist gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe.

Die obigen Behauptungen sind damit bewiesen, und es sollen jetzt die Punkte untersucht werden, die der Identität $C_5 (p, X) \equiv 0$ genügen. (Es tun das (vgl. unten!) alle singulären Punkte; hier zählen wir nur die nicht singulären auf.) Bei den Büscheltypen IIIa, IIIb und IV ist

$$C_5 (x, X) \equiv 0\ [x]\ [X].$$

---

[1]) Hier ist H gemäß den Bedingungen:

$$C_4 (H, X) \not\equiv 0\ [X], \quad C_6 (H, H, GX) \equiv 0\ [X]$$

zu wählen.

Für jeden (nicht singulären) Punkt p ist seine Nullebene gemeinsame erzeugende Ebene. In den übrigen Fällen ist die Identität $C_5(p, X) \equiv 0$ dem System der beiden Gleichungen:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, p) = 0, \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, p) = 0$$

äquivalent. Die fraglichen Punkte p erfüllen also bei Typ I die Schnittebene dieser beiden Räume, d. i. die Ebene $C_9 = 0$.

Für Typ II fallen die beiden Räume mit dem Hauptraum zusammen. Hier haben also nur die (nicht singulären) Punkte des Hauptraums, bei Typ I die der Ebene der singulären Punkte die Eigenschaft, daß ihre Nullebene gemeinsame erzeugende Ebene ist.

Nachdem die Fälle $C_5(p, X) \equiv 0$ klargestellt sind, geben wir eine Konstruktion des für $C_5(p, X) \not\equiv 0$ dem Punkte p zugeordneten Büschelkomplexes.

Bei Typ II ergibt sich für alle Punkte p derselbe Büschelkomplex, nämlich der ausgeartete (§ 7); bei Typ I genügt es, den singulären Punkt des zugeordneten Büschelkomplexes anzugeben. Er ist der einzige singuläre Punkt, der in der Nullebene von p liegt. Sein gemeinsamer Nullraum in bezug auf alle übrigen Büschelkomplexe verbindet den Punkt p mit der Ebene $C_9 = 0$.

Endlich ist noch der Fall zu betrachten, daß p singulär ist. Sei also

$$C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X].$$

Dann ist auch[1])

$$C_5(p, X) \equiv 0\,[X]. \tag{39}$$

Es ist daher $C_5(p, X) \equiv 0$ wohl eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für den singulären Charakter von p.

Man beweist leicht, daß es durch jeden singulären Punkt wenigstens eine gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe gibt. Daher gilt (vgl. S. 32!) allgemein der Satz:

Das Bestehen der Identität

$$C_5(p, X) \equiv 0\,[X]$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß durch den Punkt p wenigstens eine gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe läuft.

[1]) Nimmt man in $C_1(p, p, X)$ für X die Spezialisierung vor:

$$(H\mathfrak{X}) = C_4(G, \mathfrak{x}\mathfrak{X}),$$

so folgt bei beliebigem G:

$$C_1(p, p, H) \equiv (p\mathfrak{x})\, C_5(p, G).$$

Wenn also $C_1(p, p, X) \equiv 0\,[X]$ ist, so ist auch $C_1(p, p, H) = 0$, das heißt: $C_5(p, G) = 0$ bei beliebigem G; das kann in der Form: $C_5(p, X) \equiv 0\,[X]$ geschrieben werden.

B. Die Gerade X sei fest: $X = G$.

Für Tetrakomplexgeraden G ist $C_5(x, G) \equiv 0\,[x]$. Gehöre also jetzt G dem Tetrakomplex nicht an.

Die Gleichung $C_5(x, G) = 0$ liefert den Ort aller Punkte, deren Nullebenen im Komplex $C_4(G, X) = 0$ erzeugend sind, und außerdem noch alle singulären Punkte aller Büschelkomplexe.

Die erste Hälfte des Satzes folgt aus (38), die zweite aus (39). Für die Büscheltypen IIIa, IIIb und IV ist $C_5(x, X) \equiv 0\,[x]\,[X]$. Bei Typ I ist der Raum $C_5(x, G) = 0$ zugleich auch der gemeinsame Nullraum des singulären Punktes $C_6(G, G, x) = 0$ in bezug auf alle Büschelkomplexe, also der Raum des Bündels von Tetrakomplexgeraden durch diesen Punkt.

Für Typ II ist $C_5(x, G) \equiv 0\,[x]$, falls der Komplex $C_4(G, X)$ der ausgeartete Büschelkomplex ist; anderenfalls wird bei beliebigem G, d. h. für alle Büschelkomplexe, durch $C_5(x, G) = 0$ der Hauptraum geliefert (§ 7).

§ 12.

Die Kombinante C_3.

A. Die Ebene $\mathfrak{X}$ sei fest: $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$.

Der Raum $C_3(x, \mathfrak{E}) = 0$ ist der gemeinsame Polarraum aller Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ in bezug auf alle Gebilde M^2_3, die man erhält, wenn man in

$$C_1(x, x, G) = 0$$

für G nacheinander alle in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegenden Tetrakomplexgeraden einsetzt.

Beweis:

a) Sei $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \not\equiv 0\,[\mathfrak{X}]$.

In der Ebene $\mathfrak{E}$ liegt (§ 9) nur eine Tetrakomplexgerade: $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) = 0$. Ihr wird (§ 10) die M^2_3

$$C_1(x; x; \mathfrak{AE}, \mathfrak{BE}) = 0$$

zugeordnet. Nach I_2 läßt diese sich hier in der Form

$$(\mathfrak{A}x, \mathfrak{AE})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{BE}) - (\mathfrak{A}x, \mathfrak{BE})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{AE}) = 0$$

darstellen. Der Polarraum eines beliebigen Punktes $(\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x) = 0$ der Ebene $\mathfrak{E}$ heißt dann:

$$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{Z})\, C_3(x, \mathfrak{E}) = 0.$$

Hieraus geht die Richtigkeit der Behauptung im Falle $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \not\equiv 0$ hervor.

b) Sei $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$, $C_4(X, \mathfrak{E}x) \not\equiv 0\,[X]\,[x]$.

Die Ebene $\mathfrak{E}$ enthält ein Büschel von Tetrakomplexgeraden, dessen Scheitel bei beliebigem G durch

$$C_4(G, \mathfrak{E}x) = 0$$

geliefert wird (§ 9). Irgendeine Tetrakomplexgerade der Ebene $\mathfrak{E}$ kann daher in der Form

$$(\mathfrak{B}G)(\mathfrak{A}\mathfrak{E}, \mathfrak{Y}\mathfrak{E}, \mathfrak{X}) - (\mathfrak{A}G)(\mathfrak{B}\mathfrak{E}, \mathfrak{Y}\mathfrak{E}, \mathfrak{X}) = 0$$

dargestellt werden, wo $(\mathfrak{Y}\mathfrak{E}x) = 0$ ein beliebiger (vom Scheitel verschiedener) Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$ ist. Die dieser Geraden vermöge C_1 zugeordnete M^2_3 läßt sich (durch Anwendung von I_2) in der Gestalt:

$$(\mathfrak{B}G)\left[(\mathfrak{A}x, \mathfrak{A}\mathfrak{E})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{Y}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{A}x, \mathfrak{Y}\mathfrak{E})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{A}\mathfrak{E})\right]$$
$$-(\mathfrak{A}G)\left[(\mathfrak{A}x, \mathfrak{B}\mathfrak{E})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{Y}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{A}x, \mathfrak{Y}\mathfrak{E})(\mathfrak{B}x, \mathfrak{B}\mathfrak{E})\right] = 0$$

schreiben.

Für den Polarraum eines beliebigen Punktes $(\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x) = 0$ der Ebene $\mathfrak{E}$ findet man unter Berücksichtigung der Voraussetzung $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0$ die Gleichung

$$C_4(G; \mathfrak{Y}\mathfrak{E}, \mathfrak{Z}\mathfrak{E})\, C_3(x, \mathfrak{E}) = 0.$$

Der Polarraum ist also von der Wahl der G, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ unabhängig[1]), und damit ist die Richtigkeit der Behauptung auch in diesem Falle dargetan.

Hier gilt insbesondere noch der Satz:

Ist $\mathfrak{E}$ Büschelebene, so ist $C_3(x, \mathfrak{E}) = 0$ der Nullraum des Büschelscheitels in bezug auf den Büschelkomplex, für den $\mathfrak{E}$ erzeugend ist.

Beweis:

Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist im Büschelkomplex

$$C_4(\mathfrak{E}r, X) = 0$$

erzeugend, wo r beliebig gewählt werden kann.

Für den Nullraum des Büschelscheitels $C_4(G, \mathfrak{E}x) = 0$ findet man (unter Berücksichtigung der Voraussetzung $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0$) die Darstellung

$$C_4(G, \mathfrak{E}r)\, C_3(x, \mathfrak{E}) = 0,$$

und der Beweis ist erbracht.

Die Identität $C_3(x, \mathfrak{E}) \equiv 0\,[x]$ bestimmt

1. die gemeinsamen erzeugenden Ebenen aller Büschelkomplexe,

2. von den nur für einen einzigen Büschelkomplex erzeugenden Ebenen diejenigen, deren Tetrakom-

[1]) Der Faktor C_4 verschwindet nicht identisch, sonst wäre im Widerspruch zur Voraussetzung auch $C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x]\,[X]$, wie man durch die Spezialisierungen

$$(\mathfrak{Y}X) \equiv (x\mathfrak{y}X),\ (\mathfrak{Z}X) \equiv (x\mathfrak{z}X)$$

beweist.

plexgeraden sämtlich durch einen singulären Punkt eben dieses Büschelkomplexes laufen[1]).

Beweis:

1. $$C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}],\ C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0\,[X]\,[x].$$

Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist dann gemeinsame erzeugende Ebene. Aus $C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0$ folgt das System der beiden Gleichungen

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x],\ (\mathfrak{B}\mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x],$$

und daher auch $C_3(x, \mathfrak{E}) \equiv 0$. Die Bedingung $C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0$ ist wohl hinreichend, aber nicht notwendig für das identische Verschwinden von $C_3(x, \mathfrak{E})$.

2. Als notwendige Bedingung[2]) erhält man zunächst $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0$. Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist (§ 9) für wenigstens einen Büschelkomplex erzeugend. Sei dieser der Basiskomplex[3]) $\mathfrak{A}$. Dann reduziert sich $C_3(x, \mathfrak{E})$ auf:

$$C_3(x, \mathfrak{E}) \equiv -(\mathfrak{B}\mathfrak{E}, \mathfrak{A}x) \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{E}, x);$$

der Scheitel des Büschels von Tetrakomplexgeraden in $\mathfrak{E}$ heißt jetzt[4]) $(\mathfrak{B}\mathfrak{E}x) = 0$. Ist dieser für den Komplex $\mathfrak{A}$ singulär, so ist $C_3(x, \mathfrak{E}) \equiv 0\,[x]$ und umgekehrt.

B. Der Punkt x sei fest: $x = p$.

Die Gleichung $C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$ stellt einen linearen Ebenenpentakomplex[5]) dar, dessen Beschreibung etwas umständlich ist: Der Nullebene $\mathfrak{E}$ durch den Punkt p ist nach § 9 die quadratische Ebenenmannigfaltigkeit $C_2(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{E}) = 0$ zugeordnet (ist p singulär, so entspricht jeder Büschelebene oder gemeinsamen erzeugenden Ebene durch ihn eine solche Mannigfaltigkeit). Diese (jede von ihnen) bestimmt ein Polarsystem, vermöge dessen einer Ebene ein linearer Ebenenkomplex zugeordnet wird. Damit dieser die Gleichung $C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$ erfüllt,

---

[1]) Ist die Ebene $\mathfrak{E}$ erzeugend für den Büschelkomplex $\mathfrak{C}$ vom singulären Punkte p in $\mathfrak{E}$, aber nicht gemeinsame erzeugende Ebene, so schneidet sie jeden andern Büschelkomplex in einem Geradenbüschel, und alle diese Büschel fallen zusammen (§ 9); ihr gemeinsamer Scheitel braucht nicht mit p zusammenzufallen.

[2]) Spezialisiert man den Punkt x in $C_3(x, \mathfrak{E})$, indem man $(xx) \equiv (\mathfrak{E}\mathfrak{X}x)$ bei beliebigem $\mathfrak{X}$ setzt, so gilt (unter der Voraussetzung $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}x) \equiv 0$) die Identität

$$C_3(\mathfrak{E}\mathfrak{X}, \mathfrak{E}) \equiv 2\,C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}).$$

Aus $C_3(x, \mathfrak{E}) \equiv 0\,[x]$ folgt also $C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$.

[3]) Diese Annahme bedeutet wegen des kombinanten Charakters von C_3 keine Einschränkung.

[4]) Hier können wir uns auf den Fall $(\mathfrak{B}\mathfrak{E}x) \neq 0$ beschränken, da die Annahme $(\mathfrak{B}\mathfrak{E}x) \equiv 0$ auch $C_4(X, \mathfrak{E}x) \equiv 0\,[x]\,[X]$ nach sich zieht; diese Möglichkeit ist schon unter 1) betrachtet worden.

[5]) Das duale Analogon zum linearen Geradenpentakomplex.

kann die polar zugeordnete Ebene beliebig durch p angenommen werden.
Beweis:

a) Sei $$C_1 (p, p, X) \equiv\!\!\equiv 0 [X].$$

Durch p läuft eine Büschelebene (oder eine gemeinsame erzeugende Ebene) $C_1 (p, p, X) = 0$. Der ihr zugeordnete quadratische Ebenenpentakomplex

$$C_2 (\mathfrak{X}; \mathfrak{X}; \mathfrak{A}p, \mathfrak{B}p) = 0$$

kann in der Gestalt:

$$(\mathfrak{A}p, \mathfrak{A}\mathfrak{X}) (\mathfrak{B}p, \mathfrak{B}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{A}p, \mathfrak{B}\mathfrak{X}) (\mathfrak{B}p, \mathfrak{A}\mathfrak{X}) = 0$$

geschrieben werden. Für die Polarmannigfaltigkeit irgendeiner Ebene $(ZpX) = 0$ durch den Punkt p findet man die Gleichung:

$$C_1 (p, p, Z) C_3 (p, \mathfrak{X}) = 0,$$

die also unabhängig von Z stets denselben Ebenenpentakomplex $C_3 (p, \mathfrak{X}) = 0$ liefert, wie behauptet war.

b) Sei $$C_1 (p, p, X) \equiv 0 [X], C_4 (X, px) \equiv\!\!\equiv 0 [x] [X].$$

Nach § 10 läuft durch einen solchen Punkt ein Bündel von Tetrakomplexgeraden, dessen Raum bei beliebigem G durch die Gleichung

$$C_4 (G, px) = 0$$

geliefert wird. Daher enthält jede Ebene durch p in diesem Raume (wenigstens) ein Büschel von Tetrakomplexgeraden. Irgendeine solche Ebene[1]) heißt:

$$(\mathfrak{B}G) (\mathfrak{A}p, \mathfrak{Y}; pX) - (\mathfrak{A}G) (\mathfrak{B}p, \mathfrak{Y}; pX) = 0.$$

Ihr wird vermöge C_2 die quadratische Ebenenmannigfaltigkeit

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{B}G) [(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}p) (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}p) - (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}p) (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{A}p)]\\ -&(\mathfrak{A}G) [(\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}p) (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}p) - (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}p) (\mathfrak{B}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}p)] = 0\end{aligned}$$

zugeordnet.

Als Polarmannigfaltigkeit einer beliebigen Ebene $(ZpX) = 0$ durch den Punkt p erhält man hier den linearen Ebenenpentakomplex:

$$[(\mathfrak{B}G) (\mathfrak{A}p, \mathfrak{Y}p, Z) - (\mathfrak{A}G) (\mathfrak{B}p, \mathfrak{Y}p, Z)] C_3 (p, \mathfrak{X}) = 0,$$

oder also:

$$C_4 (G; \mathfrak{Y}p, Zp) C_3 (p, \mathfrak{X}) = 0,$$

der demnach für alle G, $\mathfrak{Y}$ und Z derselbe ist[2]), nämlich der Komplex $C_3 (p, \mathfrak{X}) = 0$.

---

[1]) Die Ebene ist als Verbindungsebene des Punktes p und der Schnittgeraden des Bündelraumes mit einer beliebigen Ebene $\mathfrak{Y}$ dargestellt.

[2]) Das identische Verschwinden von C_4 ist wegen der Voraussetzung $C_4 (X, px) \equiv\!\!\equiv 0$ nicht möglich.

Zur Erledigung des letzten Falles brauchen wir den Hilfssatz:

Der Identität $C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]$ genügt ein Punkt p dann und nur dann, wenn er singulär für wenigstens einen Büschelkomplex ist und außerdem gleichzeitig mit ihm alle kovarianten Punkte zusammenfallen, die dieser Komplex mit allen übrigen Büschelkomplexen bestimmt.

Für das identische Verschwinden von $C_3(p, \mathfrak{X})$ ergibt sich nämlich aus der Identität

$$C_3(p, Xp) \equiv 2\, C_1(p, p, X)$$

als notwendige Bedingung

$$C_1(p, p, X) = 0;$$

der Punkt p muß also singulär sein. Wegen des kombinanten Charakters von C_3 dürfen wir annehmen, daß p singulärer Punkt des Basiskomplexes $\mathfrak{A}$ ist. Dann reduziert sich C_3 nach (12) auf

$$C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{AB}, p, \mathfrak{X}).$$

Die Identität $C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv 0$ bedeutet also, daß der singuläre Punkt p gemeinsamer kovarianter Punkt des Komplexes $\mathfrak{A}$ mit allen übrigen Büschelkomplexen ist (soweit diese nicht zu $\mathfrak{A}$ konjugiert sind). Insbesondere gehören zu diesen Punkten p auch die gemeinsamen singulären Punkte

c) $$C_1(p, p, X) \equiv 0[X],\ C_4(X, p\,x) \equiv 0\,[x]\,[X]$$

aller Büschelkomplexe. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten jetzt die einzelnen Büscheltypen. Bei Typ I kann die Identität $C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv 0$ überhaupt nicht erfüllt werden, bei Typ II nur durch den Hauptpunkt, im Falle IIIa wird der gemeinsame singuläre Punkt geliefert, in den Fällen IIIb und IV jeder singuläre Punkt.

Man kann schließlich noch die Frage aufwerfen, wann der Ebenenpentakomplex $C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$ ausgeartet ist, oder mit anderen Worten, wann die Gleichung

$$(H\mathfrak{X}) \equiv C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$$

eine Gerade darstellt. Als Bedingung dafür erhalten wir die Identität:

(40) $$(HHx) \equiv 4\, C_5(p, px) \equiv 0\,[x].$$

Aus ihr folgen die beiden Gleichungen[1])

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{AB}, p) = 0, \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{AB}, p) = 0,$$

oder also

$$C_5(p, X) \equiv 0\,[X].$$

[1]) Beweis durch die beiden Spezialisierungen:

a) $(x\mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{x})$, b) $(x\mathfrak{x}) \equiv (\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{x})$.

Das heißt aber nach § 11, daß durch den Punkt p (wenigstens) eine gemeinsame erzeugende Ebene aller Büschelkomplexe läuft. Eine solche Ebene trifft den Ort aller singulären Punkte in einem Kegelschnitt[1]) (der nur bei Typ I irreduzibel ist); die Gerade $C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$ ist die Polare des Punktes p in bezug auf diesen Kegelschnitt.

Für singuläre Punkte p gilt insbesondere noch der Satz:

Ist p für einen einzigen Büschelkomplex singulär (aber $C_3(p, \mathfrak{X}) \not\equiv 0$), so ist $C_3(p, \mathfrak{X}) = 0$ für diesen Komplex die Nullgerade des gemeinsamen Nullraums von p in bezug auf alle anderen Büschelkomplexe.

Sei p für den Komplex $\mathfrak{A}$ singulär; dann wird

$$C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{X}, \mathfrak{B}\,p) \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\,p, \mathfrak{X}),$$

und der Beweis ist erbracht (vgl. S. 6!).

§ 13.

Reduktion des Kombinantensystems.

Zwischen den neun in § 4 angegebenen Kombinanten besteht eine Reihe von Identitäten. Diese erlauben es, alle Kombinanten ersten Grades rational auf eine einzige, nämlich auf C_4 zurückzuführen[2]).

Mittels I_1 leitet man leicht die schon auf S. 38 benutzte Identität:

$$2\,C_1(x, x, X) \equiv C_3(x, xX) \tag{41}$$

ab.

In ähnlicher Weise läßt sich auf Grund von I_5 und I_{5a} die Kombinante C_2 durch C_3 ersetzen. Es ist:

$$4\,C_2(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}) \equiv 2\,C_3(\mathfrak{E}\mathfrak{X}, \mathfrak{E}) - C_3(\mathfrak{E}\mathfrak{E}, \mathfrak{X}). \tag{42}$$

Stellt man in C_3 die Ebene $\mathfrak{X}$ als Verbindungsebene der drei Punkte y, z, t dar, so gelingt es, C_3 durch C_4 auszudrücken:

$$C_3(x, yzt) \equiv C_4(xy, zt) + C_4(xz, ty) + C_4(xt, yz). \tag{43}$$

(Die Herleitung erfolgt durch I_4.)

---

[1]) Der nur bei den Typen IIIb und IV auftretende Fall, daß jeder Punkt einer gemeinsamen erzeugenden Ebene singulär ist, braucht hier nicht behandelt zu werden, da für die Punkte solcher Ebenen $C_3(p, \mathfrak{X}) \equiv 0$ ist.

[2]) Es wird nicht behauptet, daß sich diese Kombinanten rational und ganz auf C_4 zurückführen lassen. Es gelingt wohl, C_1 und C_2 rational und ganz durch C_3 auszudrücken. Bei der Reduktion von C_3 auf C_4 haben wir dagegen $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}\mathfrak{x}) \equiv 0\,[\mathfrak{x}]$ vorausgesetzt; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gelingt es auch noch, C_3 rational (aber nicht ganz) durch C_4 darzustellen. Die Identität, die diesen Übergang vermittelt, ist so umfangreich, daß wir hier auf ihre Wiedergabe verzichten.

Wir zeigen jetzt, daß die beiden Kombinanten dritten Grades sich mittels der übrigen Kombinanten darstellen lassen.

In § 5 haben wir unter (16) eine Identität für C_9 angegeben, die sich auch in der Form

$$C_9(\mathfrak{X}) \equiv 4\, C_1(\mathfrak{AB}, \mathfrak{AB}, X)$$

schreiben läßt. Mittels I_2 kann C_9 durch C_4 ausgedrückt werden, wenn man in C_9 für X die Verbindungsgerade xy einsetzt. Es ist:

$$C_9(xy) \equiv 4\, C_4(\mathfrak{AB}, y; \mathfrak{AB}, x).$$

Schließlich geht $C_8(X, X, \mathfrak{X})$ aus C_5 hervor, wenn man dort den Punkt x als

$$(x\mathfrak{x}) \equiv 2\, C_4(X, \mathfrak{X}\mathfrak{x})$$

spezialisiert (vgl. auch § 5!).

Damit kann man, wenn man will, mit den vier Bildungen

$$C_4, \quad C_5, \quad C_6, \quad C_7$$

auskommen. (Vgl. die Klassifikation in § 7!)

§ 14.

Die Gewindebüschel.

Wird ein Büschel von Geradenpentakomplexen und damit der zugehörige Tetrakomplex durch einen Raum r geschnitten, so kann es vorkommen, daß die Schnittfigur aus allen Geraden dieses Raumes besteht. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß jeder Punkt des Raumes Bündelpunkt des Tetrakomplexes ist, daß also die Bedingung

$$C_1(rZ, rZ, X) \equiv 0\,[X]\,[Z]$$

erfüllt ist. Dieser Fall tritt nur bei Typ IV für den Raum $C_3(x, \mathfrak{H}) = 0$ ein (vgl. § 7!).

Sei jetzt $C_1(rZ, rZ, X) \not\equiv 0$. Es besteht dann noch die Möglichkeit, daß die Schnittfigur ein Gewinde im Raume r ist; dazu muß jede Ebene von r Büschelebene des Tetrakomplexes sein, d. h., es muß die Identität

$$C_2(r\mathfrak{x}, r\mathfrak{x}, \mathfrak{X}) \equiv 0\,[\mathfrak{X}]\,[\mathfrak{x}]$$

bestehen (vgl. § 9!). Das tritt nur für solche Räume r ein, die die singuläre Ebene eines einzigen ausgearteten Büschelkomplexes enthalten.

Im allgemeinen aber, d. i. für

$$C_2(\mathfrak{rx}, \mathfrak{rx}, \mathfrak{X}) \not\equiv 0$$

schneidet ein Raum das Geradenpentakomplexbüschel in einem Gewindebüschel, den zugehörigen Geradentetrakomplex in einem Geradennetz (worunter auch der Fall des Bündelfeldes einbegriffen werden soll). Danach muß unsere Theorie auch noch die sachgemäße Behandlung der Gewindebüschel des dreidimensionalen Raumes liefern, d. h. aus unseren Kombinanten $C_1, C_2, \ldots C_9$, soweit sie nicht illusorisch werden, müssen sich Kombinanten des Gewindebüschels herleiten lassen. Deren Gestalten lassen sich nun mechanisch finden, wenn man bedenkt, daß an Stelle der fünfreihigen Determinanten, welche der bisherigen Symbolik zu Grunde liegen, solche von vier Reihen treten. Überdies verträgt das Gewinde und damit auch das Gewindebüschel jetzt Korrelationen. Daher ist einer sachgemäßen Symbolik eine Determinante zugrunde zu legen, die aus zwei Punkten und zwei Ebenen besteht. Punktkoordinaten sollen wieder durch kleine lateinische, Ebenenkoordinaten jetzt durch kleine deutsche Buchstaben wiedergegeben werden. Für die Darstellung einer geraden Linie hat man dann zwei Möglichkeiten; neben

„Strahlkoordinaten“ $X^{ik} = (x^i y^k - x^k y^i)$

sind auch „Achsenkoordinaten“ $\mathfrak{X}_{ik} = (\mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k \mathfrak{y}_i)$

einzuführen; die Indizes laufen von null bis drei. Der Übergang zwischen Strahl- und Achsenkoordinaten wird durch die Formeln vermittelt:

$$\mathfrak{X}_{01} = X^{23}, \mathfrak{X}_{02} = X^{31}, \mathfrak{X}_{03} = X^{12}, \mathfrak{X}_{12} = X^{03}, \mathfrak{X}_{31} = X^{02}, \mathfrak{X}_{23} = X^{01}.$$

Entsprechend hat man auch für ein Gewinde zwei Arten von Koordinaten einzuführen, so daß man für dieses die sechs Darstellungen hat:

$$(\mathfrak{A}xy) = \mathfrak{A}_{ik} x^i y^k = (\mathfrak{A}X) = (A\mathfrak{X}) = A^{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k = (A\mathfrak{x}\mathfrak{y});$$
$$(\mathfrak{A}_{ki} = -\mathfrak{A}_{ik}, A^{ki} = -A^{ik}).$$

Von den Kombinanten $C_1, \ldots C_9$ werden C_5, C_8 und C_9 illusorisch. Die übrigen erhalten die neuen Gestalten:

$C_1(x, x, X)$: $(\mathfrak{A}x, \mathfrak{B}x, X)$

$C_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \mathfrak{X})$: $(A\mathfrak{x}, B\mathfrak{x}, \mathfrak{X})$

$C_3(x, \mathfrak{x})$: $(Ax, \mathfrak{B}x) - (B\mathfrak{x}, \mathfrak{A}x)$

$C_4(X, Z)$: $(\mathfrak{A}Z)(\mathfrak{B}X) - (\mathfrak{B}Z)(\mathfrak{A}X)$

$C_6(X, \mathfrak{X})$: $(\mathfrak{B}X)(B\mathfrak{X})(\mathfrak{A}A) + (\mathfrak{A}X)(A\mathfrak{X})(\mathfrak{B}B)$
$- (\mathfrak{B}X)(A\mathfrak{X})(\mathfrak{A}B) - (B\mathfrak{X})(\mathfrak{A}X)(A\mathfrak{B})$

C_7: $(\mathfrak{A}A)(\mathfrak{B}B) - (\mathfrak{A}B)(A\mathfrak{B})$.

Bemerkenswert ist, daß die bisherige Kovariante C_7 zur Invariante geworden ist.

Die Kombinante C_4 stellt das durch die Gerade Z laufende Büschelgewinde dar. Die Identität

$$C_4(Z, X) = 0\,[X]$$

wird dagegen für die Netzgeraden und nur für diese erfüllt (vorausgesetzt, daß man auch das Bündelfeld als Netz bezeichnet).

Die Gleichung $C_6 = 0$ ist in $(\mathfrak{A}X) : (\mathfrak{B}X)$ quadratisch und liefert die ausgearteten Büschelgewinde. Die Invariante C_7 ist die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung. Hier ergibt sich jetzt die Unterscheidung der einzelnen Büscheltypen.

I. $C_7 \neq 0$. Das Büschel enthält zwei getrennte ausgeartete Gewinde, deren singuläre Gerade (die Leitgerade des Netzes) windschief sind.

II. $C_7 = 0$, $C_6 \not\equiv 0$. Es gibt im Büschel ein doppelt zählendes ausgeartetes Gewinde (doppelt zählende Leitgerade).

III. $C_7 = 0$, $C_6 \equiv 0$. Alle Büschelgewinde sind ausgeartet. Ihre singulären Geraden erfüllen ein Geradenbüschel, dessen Scheitel und Ebene durch C_3 dargestellt werden können. Bei beliebigem p liefert

$$C_3(\mathfrak{x}, p) = 0$$

den Scheitel, während die Büschelebene mittels einer willkürlichen Hilfsebene $\mathfrak{d}$ in der Gestalt

$$C_3(\mathfrak{d}, \mathfrak{x}) = 0$$

geschrieben werden kann.

Bei festem $x = p$ liefert die Gleichung

$$C_1(p, p, X) = 0$$

die Netzgerade durch den Punkt p. Sie ist die gemeinsame Schnittgerade der Nullebenen von p in bezug auf alle Büschelgewinde.

Ist jedoch $C_1(p, p, X) \equiv 0$, $C_4(X, px) \not\equiv 0$, so fallen alle Nullebenen des Punktes p zusammen (soweit sie existieren); durch p läuft ein Büschel von Netzgeraden. Alle diese Punkte p erfüllen die singulären Geraden der ausgearteten Büschelgewinde. Die gemeinsame Nullebene von p kann bei beliebigem G durch

$$C_4(G, px) = 0$$

dargestellt werden.

Der Fall $C_1(p, p, X) \equiv 0$, $C_4(X, px) \equiv 0$ tritt nur beim Typ III für den Scheitel $C_3(\mathfrak{x}, q) = 0$ des Büschels der

singulären Geraden auf. Jede Gerade durch diesen Punkt gehört dem Netz an.

Sei jetzt die Gerade X fest: $X = G$. Dann ist $C_1(x, x, G) = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung. Nach dem Vorhergehenden genügt ein Punkt x dieser Gleichung dann und nur dann, wenn durch ihn (wenigstens) eine Netzgerade läuft, welche die Gerade G trifft. Insbesondere ist diese Bedingung für die Punkte der singulären Geraden der ausgearteten Büschelgewinde erfüllt. Die M^2_2 besteht aus allen Punkten aller Netzgeraden, die G treffen.

(Sie ist z. B. bei Typ I die durch G und die beiden singulären Geraden der ausgearteten Büschelgewinde bestimmte Fläche zweiter Ordnung.)

Der Rang von M^2_2 ist im allgemeinen vier. Notwendig und hinreichend dafür, daß der Rang kleiner als vier wird, ist:

$$C_6(G, \mathfrak{G}) = 0.$$

Solche Gerade G, die dieser Gleichung genügen, gehören (wenigstens) einem ausgearteten Büschelgewinde an.

Wir zeigen jetzt, daß die M^2_2 dann sofort reduzibel wird, ihr Rang also höchstens zwei ist.

Wegen des kombinanten Charakters der betrachteten Bildungen darf man annehmen, daß das Basisgewinde $\mathfrak{A}$ ausgeartet ist. Sei $(G_\mathfrak{s} x) = 0$ der Schnittpunkt von G mit der singulären Geraden von $\mathfrak{A}$, und sei $(G_\mathfrak{v} x) = 0$ irgendein weiterer Punkt von G. Dann verschwindet in der Identität[1]):

$$(\mathfrak{A}x, \mathfrak{B}x, G)(G_\mathfrak{v} G_\mathfrak{s}) \equiv (\mathfrak{A}x, G_\mathfrak{s})(\mathfrak{B}x, G_\mathfrak{v}) - (\mathfrak{A}x, G_\mathfrak{v})(\mathfrak{B}x, G_\mathfrak{s})$$

das Glied, welches den Faktor $(\mathfrak{A}x, G_\mathfrak{s})$ enthält, identisch, da der Punkt $G_\mathfrak{s}$ auf der singulären Geraden von $\mathfrak{A}$ liegen soll. Die M^2_2 besteht daher:

1. aus der Verbindungsebene $(\mathfrak{A}, G_\mathfrak{v}, x) = 0$ von G mit der singulären Geraden von $\mathfrak{A}$,

2. aus der gemeinsamen Nullebene $(\mathfrak{B}, G_\mathfrak{s}, x) = 0$ des (singulären) Punktes $G_\mathfrak{s}$ in bezug auf alle Büschelgewinde.

Die beiden Ebenen können nur bei den Typen II und III zusammenfallen, und zwar tritt das ein, falls G Netzgerade ist.

Die Identität $C_1(x, x, G) \equiv 0$ [x] wird

1. durch die singulären Geraden der ausgearteten Büschelgewinde,

2. bei Typ III noch durch alle Geraden erfüllt, welche den Scheitel des Büschels der singulären Geraden enthalten.

Die Kombinante C_2 ist hier zu C_1 dual. Daher können alle Ergebnisse über C_1 leicht übertragen werden.

---

[1]) Diese Identität gilt unter der Voraussetzung $(G\mathfrak{G}) = 0$.

Die Kombinante C_3.

Die Gleichung $C_3(x, \mathfrak{x}) = 0$ stellt eine Kollineation dar, und zwar kann sie nach Belieben als Punkt- oder als Ebenentransformation gedeutet werden.

Da C_3 zu sich selbst dual ist, können wir uns auf die erste Möglichkeit beschränken. Wir zeigen:

a) Die Verbindungslinie des Punktes p mit seinem Bildpunkt

$$(p'\mathfrak{x}) \equiv C_3(p, \mathfrak{x}) = 0$$

ist die durch p laufende Netzgerade.

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aus der Identität

$$(pp'X) \equiv 2\, C_1(p, p, X). \tag{44}$$

Diese zeigt auch, daß die Bedingung für Ruhepunkte:

$$(pp'X) \equiv 0\ [X]$$

durch alle Punkte der singulären Geraden der ausgearteten Büschelgewinde erfüllt wird.

b) Die Kollineation $C_3(p, \mathfrak{x}) = 0$ ist involutorisch.

Führt man sie zweimal nacheinander aus, so geht der Punkt p durch die resultierende Abbildung in

$$(p'\mathfrak{x}) \equiv -(p\mathfrak{x})\, C_7 = 0 \tag{45}$$

über. Unter der Voraussetzung $C_7 \neq 0$ ist diese Transformation die Identität.

Aus den Ergebnissen in a) und b) folgt:

Die Kollineation $C_3(p, \mathfrak{x}) = 0$ ist unter der Voraussetzung $C_7 \neq 0$ die windschiefe Spiegelung an den beiden Leitgeraden des durch das Gewindebüschel bestimmten Netzes. Ist aber $C_7 = 0$, so ist die Transformation singulär.

Sei jetzt $C_7 = 0$. Wir fragen dann, wann die Bildpunkte p' und q' zweier getrennter Punkte p und q zusammenfallen. Dazu ist notwendig und hinreichend $(p'q'\mathfrak{X}) \equiv 0$. Es besteht die Identität[1]):

$$(p'q'\mathfrak{X}) \equiv 2\,[(B\mathfrak{X})\, C_4(A, pq) - (A\mathfrak{X})\, C_4(B, pq)] + (pq\mathfrak{X})\, C_7. \tag{46}$$

Wegen der Voraussetzung $C_7 = 0$ fällt das letzte Glied auf der rechten Seite fort; aus $(p'q'\mathfrak{X}) \equiv 0$ folgt jetzt:

$$C_4(B, pq) = 0, \quad C_4(A, pq) = 0. \tag{47}$$

[1]) Hiermit haben wir zugleich eine Darstellung der windschiefen Spiegelung in Geradenkoordinaten gewonnen:

$$(G'\mathfrak{X}) \equiv 2\,[(B\mathfrak{X})\, C_4(A, G) - (A\mathfrak{X})\, C_4(B, G)] + (G\mathfrak{X})\, C_7.$$

Setzen wir noch $C_6 \not\equiv 0$ voraus, so liefern die Gleichungen

$$C_4(B, X) = 0, \quad C_4(A, X) = 0$$

beide das einzige ausgeartete Büschelgewinde, und aus (47) ergibt sich, daß zwei Punkte p und q dann und nur dann denselben Bildpunkt haben, wenn ihre Verbindungslinie die (doppelt zählende) Leitgerade des Netzes trifft. Daher gilt:

Ist $C_7 = 0$, $C_6 \not\equiv 0$, so wird allen Punkten einer Ebene durch die Leitgerade vermöge $C_3(x, \mathfrak{x}) = 0$ derselbe Bildpunkt zugeordnet, und dieser erweist sich (nach a) Seite 44) als Scheitel des Büschels von Netzgeraden in obiger Ebene.

Auf diese Weise kommt die projektive Zuordnung zwischen den Punkten und Ebenen der singulären Geraden zustande!

Ist schließlich $C_7 = 0$, $C_6 \equiv 0$, so gelten die beiden Identitäten

$$C_4(B, X) \equiv 0\,[X], \quad C_4(A, X) \equiv 0\,[X].$$

Alle Punkte haben denselben Bildpunkt, und dieser ist der Scheitel des Büschels, welches die singulären Geraden der Büschelgewinde bilden. Die Punkte der Büschelebene dagegen haben keinen bestimmten Bildpunkt.

Die Kombinanten geben zum Teil (nämlich C_1, C_3, C_4, C_6, C_7 oder für die dualen Nullsysteme C_2, C_3, C_4, C_6, C_7) auch dann noch einen Sinn, wenn man noch eine Dimension tiefer geht, doch verlohnt es sich nicht, näher darauf einzugehen.

Lebenslauf.

Ich, Heinrich Aymanns, katholischer Konfession, wurde am 5. Dezember 1907 als Sohn des Studienrats Joseph Aymanns und seiner Frau Cäcilia, geb. Hermes, in Ahrweiler geboren.

Von Ostern 1918 an besuchte ich das Realgymnasium in Ahrweiler und bestand dort Ostern 1926 die Reifeprüfung. Darauf widmete ich mich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften in Bonn (S.S. 1926 bis S.S. 1928, S.S. 1929 bis W.S. 1929/30) und Hamburg (W.S. 1928/29). Meine wissenschaftliche Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren Beck, Blaschke, Dyroff, Hausdorff, Konen, I. O. Müller, Pflüger, Philippson, Toeplitz und Waibel.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Professor Beck verpflichtet, der mir zur vorliegenden Arbeit die Anregung gab und mich während meiner ganzen Studienzeit in liebenswürdigster Weise unterstützte.

Die Doktorprüfung bestand ich am 21. Mai 1930.

Ed. Beck, Buchdruckerei, Bochum-Linden